

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ С КРИТЕРИЕМ МАКСИМУМА ФОНДА ПОТРЕБЛЕНИЯ

ЖУРАВЛЕВ С. Н.

(Москва)

Известно, что в оптимизационной модели с управляемой динамикой капитальных вложений свойства решений существенно зависят от экзогенно задаваемых продолжительности периода и конечного состояния экономики (т. е. производственных фондов на конец последнего года и инвестиционного задела, обеспечивающего ввод фондов в последующие годы). В принципе необходимость определения конечных условий и (или) терминальных цен можно обойти, рассматривая оптимизацию на бесконечном временном интервале: если модель имеет стационарные решения и они асимптотически устойчивы, то начальный участок ∞ -траектории и они аппроксимируется решением задачи математического программирования, у которой в качестве конечных условий (или цен) взяты соответствующие стационарные векторы. Такой подход развивался, например, в [1] применительно к замкнутым межотраслевым моделям с воспроизводимыми факторами производства. В данной статье проводится аналогичный анализ модели рамсеевского типа (с оптимизацией соотношения потребления — накопление и экзогенными трудовыми ресурсами).

Изучаются условия, обеспечивающие существование стационарных траекторий и сходимость к ним всех прочих траекторий, удовлетворяющих условиям оптимальности для модели

$$Z_t = A_L Z_t + \sum_{\tau=0}^0 B_{L,\tau} V_{t+\tau} + C_t^*, \quad (1)$$

$$FZ_t \leq \Phi_{t-1} + \delta \sum_{\tau=0}^0 \hat{\psi}_\tau V_{t+\tau}, \quad (2)$$

$$\Phi_t = \Phi_{t-1} + \sum_{\tau=0}^0 \hat{\psi}_\tau V_{t+\tau}, \quad (3)$$

* Предполагается, что в параметрах баланса производства и распределения продукции (1) учтены также внешнеэкономические связи. Например, считая, что $M_t =$

$= \hat{M}(M_t + Z_t)$, $E_t = e \sum_{j=1}^n M_{j,t}$, где E_t , M_t — векторы экспорта и импорта; $\hat{M}$ — диагональная матрица удельных весов импорта; e — вектор структуры экспорта, имеем: $\bar{A}_L = (I - \hat{M})(A_L + em(I - \hat{M})^{-1})$, где m — диагональ $\hat{M}$; $\bar{B}_L = (I - \hat{M})B_L$; $\bar{c}_0 = (I - \hat{M})c_0$; $\bar{c}_1 = (I - \hat{M})c_1$.

$$C_L Z_t \leq L_t, \quad (4)$$

где $t \geq 1$, $\tau = 0, \dots, \theta$ — индексы лет; переменные (неотрицательные): Z_t — n -вектор валовых выпусков; Φ_t — n -вектор производственных фондов отраслей на конец года t ; V_t — n -вектор прироста производственных фондов, строительство которых производится в интервале $t - \theta, \dots, t$; C_t — n -вектор потребления (включая непроизводственные капитальные вложения); L_t — среднегодовое число занятых; параметры: A_L — $n \times n$ -матрица текущих затрат (включая амортизацию основных производственных фондов); $B_{L, \tau}$ — $n \times n$ -матрицы инвестиционных затрат по годам τ строительного цикла; $\hat{F}$ — диагональная $n \times n$ -матрица среднегодовой фондоемкости; $\hat{\delta}$ — диагональная $n \times n$ -матрица коэффициентов пересчета вновь вводимых производственных фондов в среднегодовые; $\hat{\psi}_\tau$ — диагональные $n \times n$ -матрицы распределения по годам ввода новых производственных фондов; C_L — n -вектор среднегодовой трудоемкости.

Эта модель близка к предлагавшимся в [2, 3]: соответствующие модели получаются при $B_{L, \tau} = B_L \Phi_\tau$, где Φ_τ — диагональные $n \times n$ -матрицы коэффициентов распределения капитальных вложений по годам строительства, и $\hat{\psi}_0 = I$; $\hat{\psi}_\tau = 0$ при $\tau > 0$ или $\hat{F} = I$ и $\hat{\delta} = I$.

Соотношения (1)–(4) дополняются условием экспоненциального роста трудовых ресурсов (с учетом нейтрального технологического прогресса по Харроду)

$$L_t = \alpha^t L_0 \quad (5)$$

и критерием оптимальности

$$C_t = (c_0 + c_1 \gamma_t) L_t, \quad \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t \beta^{-t} \rightarrow \max^*, \quad (6)$$

где α — темп роста; β — дисконт; c_0 и c_1 — n -векторы нижнего уровня и структуры дополнительного потребления на одного занятого; $\gamma_t \geq 0$ — величина удельного потребления сверх нижнего уровня.

В данной работе модель (1)–(6) приводится к стандартному виду и вводятся условия оптимальности T -траекторий; затем формулируются условия, обеспечивающие существование и единственность стационарного состояния. Далее доказывается сходимость к нему произвольных траекторий, удовлетворяющих при $T = \infty$ условиям оптимальности (для $\beta = 1$), следуя плану, принятому в [5–7], т. е. определяя грань Неймана и устанавливая, с одной стороны, сходимость к ней всех хороших траекторий и, с другой, сходимость траекторий, идущих по неймановской грани, к стационарной. Отличие от [5–7] состоит в том, что условия сходимости формулируются непосредственно в терминах параметров рассматриваемой (весьма частной) модели (1)–(6). Из-за многогранности технологического множества данной модели ее траектории выходят на неймановскую грань (т. е. неравенства (2) и (4) обращаются в равенства, начиная с некоторого T), которая в регулярном случае содержит только стационарный вектор. В заключение на основе (1)–(4) строится замкнутая модель с заданным темпом роста α .

* В смысле [4], т. е. $\limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T (\gamma'_t - \gamma_t) \beta^{-t} \leq 0$ для любой траектории γ'_t (1) —

(6) с тем же началом $(\Phi_0, V_1, \dots, V_\theta, L_0)$.

1. Условие оптимальности. Ограничения (1)–(6) запишем в форме

$$A_N \tilde{z}_{t+1} + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \gamma_{t+1} \leq \alpha^{-1} B_N \tilde{z}_t, \quad C_N \tilde{z}_{t+1} \leq 1, \quad t=0, \dots, T-1, \quad (7)$$

где

$$A_N = \begin{bmatrix} A_L - I & B_{L,0} & \dots & B_{L,\theta-1} & B_{L,\theta} \\ \hat{F} & -\hat{\sigma}\hat{\psi}_0 & \dots & -\hat{\sigma}\hat{\psi}_{\theta-1} & -\hat{\sigma}\hat{\psi}_\theta \\ & I & -\hat{\psi}_0 & \dots & -\hat{\psi}_{\theta-1} & -\hat{\psi}_\theta \\ & & I & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & I & \end{bmatrix},$$

$$B_N = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & \dots & \\ & & & & I \end{bmatrix} \quad (8)$$

— квадратные матрицы порядка $N = (\theta+3)n$; $\tilde{z}_t = (Z_t, \Phi_t, V_{t,0}, \dots, V_{t,\theta}) L_t^{-1}$ (здесь по определению: $V_{t,\tau} \equiv V_{t+\tau}$ для всех $t \geq 0, \tau = 0, \dots, \theta$); $C_N = (C_L, 0)$; $\tilde{c}_0 = (c_0, 0)$; $\tilde{c}_1 = (c_1, 0)$ — N -векторы.

Рассмотрим на траекториях (7) задачу: $\sum_{t=1}^T \gamma_t \beta^{-t} + \alpha^{-1} \tilde{P}_T B_N \tilde{z}_T \rightarrow \max$ при

заданных конечных ценах $\tilde{P}_T$ и начальном состоянии $\tilde{z}_0$. Для оптимальности траектории $(\tilde{z}_t, \gamma_t)_t^T$ необходимо и достаточно существование неотрицательных траекторий $(\tilde{P}_t)_{t=0}^{T-1}, (W_t)_{t=1}^T$, удовлетворяющих вместе с $(\tilde{z}_t, \gamma_t)_t^T$ соотношениям

$$\tilde{P}_t A_N + W_{t+1} C_N \geq \alpha^{-1} \tilde{P}_{t+1} B_N, \quad \tilde{P}_t \tilde{c}_1 \geq \beta^{-(t+1)}, \quad (9)$$

$$\gamma_{t+1} \beta^{-(t+1)} + \alpha^{-1} \tilde{P}_{t+1} B_N \tilde{z}_{t+1} = \tilde{P}_t (\alpha^{-1} B_N \tilde{z}_t - \tilde{c}_0) + W_{t+1} \quad (10)$$

при $t=0, \dots, T-1$. Действительно, задача $\sum_{t=1}^T (W_t - \tilde{P}_{t-1} \tilde{c}_0) + \alpha^{-1} \tilde{P}_0 B_N \tilde{z}_0 \rightarrow \min$

на траекториях $(\tilde{P}_{t-1}, W_t)_t^T$, удовлетворяющих (9) при $t=0, \dots, T-1$ и фиксированном $\tilde{P}_T$, является двойственной к сформулированной выше и, следовательно, их оптимальные значения совпадают [8, стр. 178]. Кроме того, для любой пары траекторий, удовлетворяющих (7) и (9), условия $\gamma_{t+1} \beta^{-(t+1)} + \alpha^{-1} \tilde{P}_{t+1} B_N \tilde{z}_{t+1} \leq \tilde{P}_t (\alpha^{-1} B_N \tilde{z}_t - \tilde{c}_0) + W_{t+1}$ при каждом $t=0, \dots, T-1$, очевидно, вытекают из (7), (9) (после умножения их соответственно на $\tilde{P}_t$ и $\tilde{z}_{t+1}$). Суммируя эти соотношения по $t=0, \dots, T-1$, имеем

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t \beta^{-t} + \alpha^{-1} \tilde{P}_T B_N \tilde{z}_T \leq \sum_{t=1}^T (W_t - \tilde{P}_{t-1} \tilde{c}_0) + \alpha^{-1} \tilde{P}_0 B_N \tilde{z}_0, \quad \text{откуда получаем (10)}$$

для оптимальных траекторий. Согласно (10), выражение, стоящее в левой (правой) части, максимизируется вектором $(\tilde{z}_{t+1}, \gamma_{t+1})$, удовлетворяющим (7) при фиксированном $\tilde{z}_t$ (соответственно минимизируется $(\tilde{P}_t, W_{t+1})$, удовлетворяющим (9) при фиксированном $\tilde{P}_{t+1}$) и каждом $t=0, \dots, T-1$.

N -вектор $\bar{P}_t$ можно интерпретировать как $(p_t, q_t, p_{t,0}, \dots, p_{t,n})$, где p_t — цены продуктов; q_t — прокатные оценки фондов; $p_{t,\tau}$ — цены фондов на определенных стадиях строительства; W_t (скаляр) — ставка заработной платы.

Для автономизации системы (9), (10) следует перейти к дисконтированным переменным: $\tilde{p}_t = \bar{P}_t \beta^{t+1}$, $w_t = W_t \beta^t$, так что получается

$$\tilde{p}_t A_N + w_{t+1} C_N \geq (\alpha \beta)^{-1} \tilde{p}_{t+1} B_N, \quad \tilde{p}_t \tilde{c}_1 \geq 1, \quad (11)$$

$$\gamma_{t+1} + (\alpha \beta)^{-1} \tilde{p}_{t+1} B_N \tilde{z}_{t+1} = \tilde{p}_t (\alpha^{-1} B_N \tilde{z}_t - \tilde{c}_0) + w_{t+1}.$$

Траектории $(\tilde{z}_t, \gamma_{t+1}; \tilde{p}_t, w_{t+1})_{t=0}^\infty$ системы (7), (11) и составляют предмет изучения.

2. Стационарные траектории. Полагая в (7), (11): $(\tilde{z}_t, \gamma_{t+1}; \tilde{p}_t, w_{t+1}) = (\tilde{z}^0, \gamma^0; \tilde{p}^0, w^0)$ при всех t , имеем

$$(A_N - \alpha^{-1} B_N) \tilde{z}^0 + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \gamma^0 \leq 0, \quad C_N \tilde{z}^0 \leq 1, \quad (12)$$

$$\tilde{p}^0 (A_N - (\alpha \beta)^{-1} B_N) + w^0 C_N \geq 0, \quad \tilde{p}^0 \tilde{c}_1 \geq 1, \quad (13)$$

$$\gamma^0 = \tilde{p}^0 ((\beta - 1) (\alpha \beta)^{-1} B_N \tilde{z}^0 - \tilde{c}_0) + w^0. \quad (14)$$

Отметим, следуя [9], что $(\tilde{z}^0, \gamma^0)$, удовлетворяющие вместе с $(\tilde{p}^0, w^0)$ условиям (12)–(14), могут быть найдены из уравнения (относительно $\tilde{z}^0$)

$$\tilde{z}^0 \in \text{Arg max}_{(z, \gamma) \geq 0} \{ \gamma : (A_N - (\alpha \beta)^{-1} B_N) z + \tilde{c}_1 \gamma \leq (\beta - 1) (\alpha \beta)^{-1} B_N \tilde{z}^0 - \tilde{c}_0, C_N z \leq 1 \},$$

а $(\tilde{p}^0, w^0)$ — из двойственной задачи

$$p((\beta - 1) (\alpha \beta)^{-1} B_N \tilde{z}^0 - \tilde{c}_0) + w \rightarrow \min$$

по $(p, w) \geq 0$: $p(A_N - (\alpha \beta)^{-1} B_N) + w C_N \geq 0$, $p \tilde{c}_1 \geq 1$.

В частном случае, при $\beta = 1$, уравнение для $(\tilde{z}^0, \gamma^0)$ переходит в задачу линейного программирования: $\gamma^0 \rightarrow \max$ по $(\tilde{z}^0, \gamma^0)$, удовлетворяющим (12). При выполнении определенных предположений о параметрах модели (1)–(6) ее единственная стационарная траектория явно выражается через значения параметров.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие предположения.

I. Матрица A_L — продуктивна, т. е. существует $(I - A_L)^{-1} \geq 0$.

$$\text{II. } (I - A_L)^{-1} B_L \hat{P} > 0, \text{ где } B_L = \sum_{\tau=0}^n B_{L,\tau}.$$

III. $\alpha \geq 1$ и $(\alpha - 1) < (\lambda(L(\alpha)))^{-1}$, где $L(\alpha) = (I - A_L)^{-1} B_L(\alpha) \hat{\Psi}^{-1}(\alpha) (\hat{\sigma}(\alpha - 1) + I)^{-1} \hat{P}$,

$$B_L(\alpha) = \sum_{\tau=0}^n \alpha^\tau B_{L,\tau}, \quad \hat{\Psi}(\alpha) = \sum_{\tau=0}^n \alpha^\tau \hat{\Psi}^\tau; \lambda(L) -$$

спектральный радиус L .

IV. $\alpha \beta \geq 1$ и $(\alpha \beta - 1) < (\lambda(L(\alpha \beta)))^{-1}$.

V. $C_L \geq 0$, $c_0 \geq 0$, $c_1 \geq 0$, $C_L S(\alpha) c_0 < 1$, где $S(\alpha) = (I - (\alpha - 1) L(\alpha))^{-1} \times (I - A_L)^{-1}$.

VI. Пусть по определению

$$w^0 = (C_L S(\alpha \beta) c_1)^{-1},$$

$$\begin{aligned} p^0 &= w^0 C_L S(\alpha\beta), \\ q^0 &= (p^0(I - A_L) - w^0 C_L) \bar{F}^{-1}, \\ p_0^0 &= (\alpha\beta - 1)^{-1} q^0. \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что векторы

$$p_\tau^0 = p_0^0(\delta(\alpha\beta - 1) + I) \hat{\Psi}_{\tau-1} - p^0 B_{L,\tau-1} + (\alpha\beta)^{-1} p_{\tau-1}^0, \quad \tau \geq 2, \quad \tau = 1, \dots, \theta, \quad (16)$$

положительны.

Тогда система (12)–(14) с A_N, B_N , определенными в (8), имеет единственное и положительное решение $(z^0, \gamma^0; p^0, w^0)$, вектор $(z^0, \gamma^0) = (z^0, f^0, v_0^0, \dots, v_\theta^0; \gamma^0)$ рассчитывается по формулам

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= (1 - C_L S(\alpha) c_0) (C_L S(\alpha) c_1)^{-1}, \\ z^0 &= S(\alpha) (c_0 + c_1 \gamma^0), \\ f^0 &= \alpha(\delta(\alpha - 1) + I) \bar{F} z^0, \\ v_\tau^0 &= \alpha^{(\tau-1)} (\alpha - 1) \hat{\Psi}^{-1}(\alpha) f^0, \quad \tau = 0, \dots, \theta, \end{aligned} \quad (17)$$

а вектор $(\tilde{p}^0, w^0) = (p^0, q^0, p_0^0, \dots, p_\theta^0, w^0)$ — по (15), (16).

Доказательство. Заметим, что из предположений I–IV вытекает существование и положительность матриц $S(\alpha)$ и $S(\alpha\beta)$ [10, стр. 141]. Вектор, определенный (15), (16), удовлетворяет условиям (13) как равенствам, при этом из V следует, что w^0, p^0, q^0, p_0^0 положительны. Положительность $(\tilde{p}^0, w^0)$ и условие (14) влекут равенства в (12), отсюда имеет место (17) для $(\tilde{z}^0, \gamma^0)$. Поскольку $(\tilde{z}^0, \gamma^0) > 0$, ограничения (13) могут выполняться только как равенства, так что (15), (16) — единственно возможные. Теорема доказана.

Остановимся на интерпретации условий теоремы. Предположения I, II стандартны (ср. с [1]); III означает, что экономика достаточно продуктивна для обеспечения полной занятости при ненулевом потреблении и росте трудовых ресурсов с темпом α . Пусть α^0 — наибольшее значение, удовлетворяющее условию $\alpha^0 - 1 = (\lambda(L(\alpha^0)))^{-1}$ (можно показать, что оно существует, если выполнены I, II и $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \lambda(L(\alpha)) > 1$); это максимально

возможный (так называемый неймановский или гарантированный по Хиксу темп воспроизводства фондов в условиях стационарности их структуры), при этом потребление равно нулю. В III утверждается, в частности, что $\alpha < \alpha^0$. Такое α^0 является и наибольшим значением темпа дисконтирования цен, при котором существует их стационарный вектор, обуславливающий стоимостной баланс затрат и выпуска для каждой отрасли (при нулевой ставке заработной платы). Предположение IV, устанавливающее, в частности, что $\alpha\beta < \alpha^0$ (т. е. β не слишком велико), — условие существования системы цен (с положительным w^0), в которой стоимость выпуска каждой отрасли равна стоимости затрат (включающих текущие затраты, плату за фонды и заработную плату) и, таким образом, достигается рентабельность всех отраслей. Матрица $S(\alpha)$, введенная в V, служит для перебора от данного вектора потребления s к валовым выпускам $z = S(\alpha)s$, обеспечивающим это потребление, а также накопление, необходимое для стационарного роста со структурой z и темпом α . Предположение V означает, что производительность труда достаточно высока, чтобы при таком росте поддерживать потребление на уровне, несколько превосходящем s . Наконец, VI налагает ограничение на временную структуру инвестицион-

ных матриц B_L , τ и $\hat{\psi}_\tau$, состоящее в том, что капитальные затраты должны строго предшествовать во времени их результатам (вводам основных производственных фондов). Так, из положительности p_1^0 , т. е. условия $p_0^0(\delta(\alpha\beta-1)+I)\hat{\psi}_0 > p^0 B_{L,0}$, следует, что стоимость фондов, вводимых в последнем ($\tau=0$) году инвестиционного цикла, превышает (во всех отраслях) стоимость вложений в эти фонды в том же году, т. е. она включает также стоимость затрат предшествующих лет; аналогично интерпретируется требование положительности p_τ^0 при других τ .

Отметим, что в отличие от подобной модели с гладкой производственной функцией (например, [11, стр. 489]) в данном случае натуральные показатели равновесия, (т. е. уровень потребления γ^0 , а также векторы z^0, f^0, v_τ^0) не зависят от дисконта β .

3. Хорошие траектории. По определению [4], траектория $(z_t, \gamma_{t+1})_0^\infty$

системы (7) — хорошая, если $\inf_T \sum_{t=1}^T (\gamma_t - \gamma^0) \beta^{-t} > -\infty$.

Лемма 1. Пусть $(z_t, \gamma_{t+1}; p_t, w_{t+1})_0^\infty$ — траектория (7), (11) с ограниченным $\beta^{-t} p_t B_N z_t$, тогда $(z_t, \gamma_{t+1})_0^\infty$ — хорошая траектория.

Доказательство. Так как $(z_t, z_{t+1}; \gamma_{t+1}) = (z^0, z^0; \gamma^0)$ удовлетворяет (7), то $\gamma^0 + (\alpha\beta)^{-1} p_{t+1} B_N z^0 \leq p_t (\alpha^{-1} B_N z^0 - \tilde{c}_0) + w_{t+1}$, и

$$\gamma_{t+1} - \gamma^0 \geq (\alpha\beta)^{-1} p_{t+1} B_N (z^0 - z_{t+1}) + \alpha^{-1} p_t B_N (z_t - z^0) \quad (18)$$

для траекторий (7), (11). Суммируя (18), имеем

$$\sum_{t=1}^T (\gamma_t - \gamma^0) \beta^{-t} \geq (\alpha\beta)^{-1} p_0 B_N (z_0 - z^0) + \beta^{-T} (\alpha\beta)^{-1} p_T B_N (z^0 - z_T),$$

что не меньше, чем $-((\alpha\beta)^{-1} p_0 B_N z^0 + M)$, где $M \geq \beta^{-t} p_t B_N z_t$ при всех $t=1, \dots, \infty$. Лемма 1 доказана.

Подставляя в (11) стационарные значения p^0, w^0 , получим

$$\gamma_{t+1} = p^0 (\alpha^{-1} B_N (z_t - \beta^{-1} z_{t+1}) - \tilde{c}_0) + w^0. \quad (19)$$

T -траектория (7) называется неймановской [7], если она удовлетворяет (19) при $t=0, \dots, T-1$.

Лемма 2. Пусть $\beta=1$ и $\{(z_{t+\tau}, \gamma_{t+\tau})_{\tau=0}^T\}$ — последовательность T -отрезков хорошей траектории, $t=0, \dots, \infty$. Тогда предельные точки $(z_\tau^*, \gamma_\tau^*)_{\tau=0}^T$ этой последовательности — T -шаговые неймановские траектории.

Доказательство. Для произвольной траектории (7) выполняется соотношение: $\gamma_{t+1} \leq p^0 (\alpha^{-1} B_N (z_t - z_{t+1}) - \tilde{c}_0) + w^0$; оно следует из того, что для $(p_t, p_{t+1}; w_{t+1}) = (p^0, p^0; w^0)$ имеет место (9), а неравенство $\gamma_{t+1} + \alpha^{-1} p_{t+1} B_N z_{t+1} \leq p_t (\alpha^{-1} B_N z_t - \tilde{c}_0) + w_{t+1}$ для любых $(z_t, z_{t+1}; \gamma_{t+1})$ и $(p_t, p_{t+1}; w_{t+1})$, удовлетворяющих соответственно (7) и (9), отмечено выше в п. 1. Поэтому $\delta_{t+1} = \delta(z_t, z_{t+1}; \gamma_{t+1}) = -(\gamma_{t+1} - p^0 (\alpha^{-1} B_N (z_t - z_{t+1}) - \tilde{c}_0) + w^0) \geq 0$. Поскольку $\gamma_{t+1} - \gamma^0 = \alpha^{-1} p^0 B_N (z_t - z_{t+1}) - \delta_{t+1}$, то

$$\sum_{t=1}^T (\gamma_t - \gamma^0) = \alpha^{-1} p^0 B_N (z_0 - z_T) - \sum_{t=1}^T \delta_t. \quad (20)$$

Из (20) вытекает сходимость ряда $\sum_{t=1}^\infty \delta_t$, т. е. $\delta(z_t, z_{t+1}; \gamma_{t+1}) \rightarrow 0$ при

$t \rightarrow \infty$. Лемма 2 доказана.

4. Неймановские траектории. Положительность p^0 и w^0 влечет выполнение ограничений (7) как равенств для неймановских траекторий. Подставляя в эти равенства значение γ_{t+1} из (19), получим $Az_{t+1} + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1(w^0 - p^0 \tilde{c}_0) = \alpha^{-1} Bz_t$, $C_N z_{t+1} = 1$, где $A = A_N - (\alpha \beta)^{-1} \tilde{c}_1 p^0 B_N$, $B = B_N - \tilde{c}_1 p^0 B_N$, так что неймановская траектория имеет представление $z_t = z^0 + z_t'$. Здесь (z_t') — траектория системы

$$Az_{t+1}' = \alpha^{-1} Bz_t', \quad C_N z_{t+1}' = 0. \quad (21)$$

Лемма 3. Пусть $\lambda A - B$ — несингулярный пучок матриц, т. е. $\det(\lambda A - B) \neq 0$ [12], и выполнено предположение регулярности, формулируемое в тексте доказательства. Тогда для любых $a > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует T_1 такое, что для траекторий $(z_t)_0^T$ системы (21) длины $T \geq 2T_1$ условия $|z_0| \leq a$, $|z_T| \leq a$ влекут $|z_t| < \varepsilon$ при $t = T_1, \dots, T - T_1$ (ср. с [7, стр. 736]).

Доказательство. Несингулярный матричный пучок $\lambda A - B$ имеет каноническое представление $L_1 = PAQ$, $L_2 = PBQ$, где $L_1 = \text{diag}(I_{n_1}(0), \dots, I_{n_l}(0), I)$, $L_2 = \text{diag}(I_{n_1}, \dots, I_{n_l}, G)$; P, Q — невырожденные матрицы; здесь $I_s, I_s(\lambda), G_s$ — соответственно единичная матрица, жорданова клетка и матрица в жордановой нормальной форме порядка s [12], так что система (21) эквивалентна

$$I_{n_j}(0) u_{t+1}^j = \alpha^{-1} u_t^j, \quad j = 1, \dots, l, \quad (22)$$

$$\bar{u}_{t+1} = \alpha^{-1} G \bar{u}_t, \quad C_N Q u_{t+1} = 0,$$

где $u = (u^1, \dots, u^l, \bar{u}) = Q^{-1} z$. Рассматривая (22) при $t = 0, \dots, T-1$, $T \geq N-1$, имеем $\bar{u}_t^j = 0$, $j = 1, \dots, l$, и $z_t = \bar{Q}(G/\alpha)^t \bar{u}_0$, $t \leq T - (N-1)$, где $\bar{Q}$ — матрица, составленная из столбцов, соответствующих $\bar{u}$; $\bar{u}_0$ определяется из условия $Q^{-1} z_0 = (0, \bar{u}_0)$. Пусть $\bar{Q}_i$ — набор столбцов матрицы $\bar{Q}$, соответствующих i -му диагональному блоку G , а $\bar{u}_i$ — компоненты $\bar{u}$. Если подпространство, натянутое на $\bar{Q}_i$, не содержится в гиперплоскости $C_N z = 0$, то равенство $C_N \bar{Q}(G/\alpha)^t \bar{u}_0 = 0$, где $t \geq N-1$, возможно только, если $\bar{u}_i(0) = 0$. Поэтому $z_t = \bar{Q}(\bar{G}/\alpha)^t \bar{u}_0$, где $\bar{Q}$ составлена из векторов, для которых линейная оболочка Q_i лежит в гиперплоскости $C_N z = 0$; $\bar{G}$ и $\bar{u}$ — соответствующие блоки G и $\bar{u}_0$.

Введем предположение регулярности.

Блок $\bar{G}$ не имеет собственных чисел, равных по модулю α , тогда $z_t = \bar{Q}_1(\bar{G}_1/\alpha)^t u_0^1 + \bar{Q}_2(\bar{G}_2/\alpha)^{-(t-1)} u_T^2$, где модули собственных чисел $\bar{G}_1$ меньше, а $\bar{G}_2$ — больше α , так что $(\bar{G}_1/\alpha)^t \rightarrow 0$, $(\bar{G}_2/\alpha)^{-t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из $|z_t| \leq a$ следует $|u_t| \leq a/\|Q\|$, где $t = 0$ или $t = T$. Пусть T' таково, что $\|\bar{Q}(\bar{G}_1/\alpha)^t\| |u_0^1| < \varepsilon/2$ при $t \geq T'$, а T'' таково, что $\|\bar{Q}(\bar{G}_2/\alpha)^{-t}\| |u_T^2| < \varepsilon/2$ при $t \geq T''$, тогда можно взять $T_1 = \max(T', T'', N-1)$. Лемма 3 доказана.

Ниже постоянно предполагается, что $\beta = 1$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения I—VI* и дополнительно VII. Полином $\det(P(\lambda))$ имеет только простые корни λ с $|\lambda| = \alpha$, и если такие корни существуют, то для них выполняется условие $C_L z_\lambda \neq 0$; здесь $n \times n$ -матрица

$$P(\lambda) = \lambda(I - (\lambda - 1)L(\lambda)) + (1 - \lambda\alpha^{-1})(I - A_L)^{-1} c_1(\lambda \alpha p_0^0 +$$

* Предположение V усилено требованием $C_L > 0$ (обозначается V'); предположение IV при $\beta = 1$ совпадает с III.

$$+(\lambda-1) \left(\sum_{\tau=1}^0 \lambda^{\tau} p_{\tau}^0 \right) \hat{\Psi}^{-1}(\lambda) (\delta(\lambda-1)+I)^{-1} \hat{F};$$

z_{λ} — ненулевое решение уравнения $P(\lambda)z_{\lambda}=0$.

Тогда для хороших траекторий $(z_t, \gamma_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ системы (7) (и, следовательно, для траекторий $(z_t, \gamma_{t+1}; p_t, w_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ системы (7), (11) с ограниченным $p_t B_N z_t$) выполняется $(z_t, \gamma_t) \rightarrow (z^0, \gamma^0)$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно предположению V' , последовательность $\{(z_{t+\tau}, \gamma_{t+\tau})_{\tau=0}^T\}$ T -отрезков траектории (7) ограничена; значит, она имеет предельные точки $(z_{\tau}^*, \gamma_{\tau}^*)_{\tau=0}^T$, которые являются неймановскими траекториями, если исходная траектория $(z_t, \gamma_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ хорошая.

Траектории $z_{\tau}^* = z_{\tau}^* - z^0$ удовлетворяют системе (21). Из предположений I—VII следуют все условия леммы 3: действительно, корни полинома $\det(\lambda A - B)$ являются также корнями $\det(P(\lambda))$, так что матрица $\alpha A - B = \alpha A_N - B_N$ невырождена (так как $P(\alpha)$ невырождена вследствие III) и $\lambda A - B$ — несингулярный пучок; условие регулярности следует из VII; ограниченность z_0^* и z_T^* — из V. Поэтому для данного $\varepsilon/2 > 0$ существует T_1 такое, что $|z_{T_1}^*| < \varepsilon/2$.

Пусть T' таково, что $\max_{\tau=0, T} |z_{t+\tau} - z_{\tau}^*| < \varepsilon/2$ при всех $t \geq T'$, тогда при $t \geq T = T' + T_1$ выполняется $|z_t - z^0| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. В предположениях I—VII траектория (7), (11) с ограниченным $p_t B_N z_t$ оптимальна.

Доказательство. Пусть $(z_t', \gamma_{t+1}')_{t=0}^{\infty}$ — траектория (7) с тем же

началом z_0 . Если она плохая, то $\sum_{t=1}^T (\gamma_t' - \gamma_t) = \sum_{t=1}^T (\gamma_t' - \gamma^0) - \sum_{t=1}^T (\gamma_t - \gamma^0) \rightarrow -\infty$.

Если же она хорошая, то $z_t' \rightarrow z^0$, и из неравенства

$$\sum_{t=1}^T (\gamma_t' - \gamma_t) \leq \alpha^{-1} p_T B_N (z_T - z_T') \text{ вытекает}$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T (\gamma_t' - \gamma_t) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha^{-1} p_T B_N (z_T - z_T') = 0.$$

В частности, стационарная траектория (z^0, γ^0) оптимальна.

5. Условие (19) при больших t для хороших траекторий. Если (z_{t+1}, γ_{t+1}) , входящий в (7), (11), положителен, то ограничения (11) выполняются как равенства. Отсюда $p_t (\alpha^{-1} B_N z^0 - \tilde{c}_0) + w_{t+1} = p_t (A_N z^0 + \tilde{c}_1 \gamma^0) + w_{t+1} C_N z^0 = \gamma^0 + (p_t A_N + w_{t+1} C_N) z^0 = \gamma^0 + \alpha^{-1} p_{t+1} B_N z^0$, т. е. положительность (z_{t+1}, γ_{t+1}) влечет

$$\gamma^0 + \alpha^{-1} p_{t+1} B_N z^0 = p_t (\alpha^{-1} B_N z^0 - \tilde{c}_0) + w_{t+1}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (11) (с равенствами), получим: $p_t A' + \gamma^0 C_N = \alpha^{-1} p_{t+1} B'$, $p_t \tilde{c}_1 = 1$, где $A' = A_N - \alpha^{-1} B_N z^0 C_N + \tilde{c}_0 C_N$, $B' = B_N - B_N z^0 C_N$. Аналогично (21) имеем представление $p_t = p^0 + p_t'$ для траекторий, удовлетворяющих (23), где (p_t') — траектория системы

$$p_t' A' = \alpha^{-1} p_{t+1}' B', \quad p_t' \tilde{c}_1 = 0. \quad (24)$$

Теорема 3. При I'—VII* и дополнительном предположении

VIII. $\det(\lambda A' - B')$ имеет только простые корни λ с $|\lambda| = \alpha$, и если такие корни существуют, то для них $p_{\lambda} c_1 \neq 0$, где p_{λ} — первые n компонент вектора $\tilde{p}_{\lambda}$, $\tilde{p}_{\lambda}(\lambda A' - B') = 0$ ** траектории $(z_t, \gamma_{t+1}; p_t, w_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ системы (7), (11) с ограниченным $p_t B_N z_t$ удовлетворяют условиям (19), (23) при всех достаточно больших t (так что ограничения (7), (11) выполняются как равенства).

Для доказательства применяется теорема 2 (из $(z_t, \gamma_t) \rightarrow (z^0, \gamma^0)$ следует $(z_t, \gamma_t) > 0$ при достаточно больших t), а затем лемма 3 к системе (24). Положительность (p_t, w_{t+1}) влечет выполнение ограничений (7) как равенств, а также условия (19), которое выводится аналогично (23).

Следствие. Пусть в дополнение к I'—VI справедливы предположения:

VII'. Уравнение $\det(\lambda A - B) = 0$ не имеет кратных (не равных нулю) корней; из $(\lambda A - B)\tilde{z} = 0$ вытекает $C_L z \neq 0$, где z — первые n компонент вектора $\tilde{z} \neq 0$, $\lambda \neq 0$;

VIII'. Уравнение $\det(A' - \lambda B') = 0$ не имеет кратных (не равных нулю) корней; из $\tilde{p}(A' - \lambda B') = 0$ следует $p_{\lambda} c_1 \neq 0$ (см. VIII), $\tilde{p} \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

Тогда существует такое T , что при $t \geq T$ выполняется $z_t = z^0$, $p_t = p^0$.

6. Закрытая модель. Пусть в (1) $C_t = (c_0 + c_1 \gamma^0) L_t$; тогда (1) — (4) становится замкнутой моделью, подобной [3], однако в отличие от [3] она имеет заданный темп роста α . Ее можно записать также в виде (1)' — (3), где

$$Z_t \geq \bar{A}_L Z_t + \sum_{\tau=0}^6 B_{L,\tau} V_{t+\tau} \quad (1)'$$

$$c \bar{A}_L = A_L + (c_0 + c_1 \gamma^0) C_L.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsukui J. Turnpike Theorem in a Generalized Dynamic Input-Output System. — *Econometrica*, 1966, в. 34, № 2.
2. Баранов Э. Ф. Проблемы разработки схемы динамической модели межотраслевого баланса. — *Экономика и матем. методы*, 1968, т. IV, вып. 1.
3. Ефимов М. Н., Мовшович С. М. Модель сбалансированного роста. Равновесные народнохозяйственные пропорции и цены. — В кн. Первая конференция по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. Вып. I. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1971.
4. Gale D. On Optimal Development in a Multi-Sector Economy. — *Rev. Econ. Stud.*, 1967, в. 34, № 1.
5. McKenzie L. W. Accumulation Programs of Maximum Utility and the von Neumann Facet. — In *Value, Capital and Growth*. Edinburg, 1968.
6. McKenzie L. W. Turnpike Theory. — *Econometrica*, 1976, в. 44, № 5.
7. Мовшович С. М. Асимптотическое поведение хороших траекторий в модели с невоспроизводимыми ресурсами. — *Экономика и матем. методы*, 1978, т. XIV, вып. 4.
8. Голдман А. Дж., Таккер А. У. Теория линейного программирования. — В кн. Личейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
9. Макаров В. Л. Существование магистралей при дисконте, большем единицы. — В кн. Оптимизация. Вып. 2 (19). Новосибирск: Наука, 1971.
10. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
11. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
12. Мовшович С. М. Магистральный рост в динамических народнохозяйственных моделях. — *Экономика и матем. методы*, 1972, т. VIII, вып. 2.

Поступила в редакцию
28 V 1979

* Условие I' — это предположение продуктивности $\bar{A}_L = A_L + c_0 C_L$; III' — требование наряду с III также $(\alpha - 1) < (\lambda(L(\alpha)))^{-1}$, где $\bar{L}$ определяется аналогично L с заменой A_L на $\bar{A}_L$; $V'' - c_1 > 0$ в дополнение к V'.

** Очевидно, условие VIII можно (как VII) выразить непосредственно в терминах параметров модели (1) — (6).