Таблица 3

Прогнозируемый среднегодовой суммарный выход сортового топлива

Показатели	Годы						
	1	2	3	4	5	6	7
γ_0	39,95	39,67	39,43	39,15	39,02	38,85	38,69
$\Delta\gamma_0$	2,97	3,03	3,08	3,15	3,21	3,27	3,33

обусловлено сохранением тенденций и инерционностью развития техники и технологии добычи угля. Однако следует иметь в виду незамкнутость использованных моделей, т. е. наличие параметров, с помощью которых возможно управляющее воздействие на процесс формирования основных потребительских качеств добываемой горной массы (например, создание механизированных комплексов для выемки пластов мощностью от 0,5 до 0,8 м, изменение принципа разрушения угля и др.).

Таким образом, предлагаемый метод позволяет получить достаточно обоснованную прогнозную оценку получения угольной продукции с определенными качественными параметрами. Предполагается использовать данный метод и при разработке прогнозов показателей на уровне производственных единиц и объединений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е. М.* Статистические методы прогнозирования. М.: Статистика, 1975.
2. *Ершов Э. Б.* Об одном методе объединения частных прогнозов.— В кн. Статистический анализ экономических временных рядов и прогнозирование. М.: Наука, 1973.
3. *Ивахненко А. Г., Лапа В. Г.* Предсказание случайных процессов. Киев: Наукова думка, 1971.

Поступила в редакцию
25 VII 1978

О ВЫЯВЛЕНИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

ШЕРМЕНЕВ А. М.

(Москва)

Будем предполагать, что отношение потребительского предпочтения на множестве товаров задано функцией полезности. Спрос и условия замещения одних товаров другими определяют множество безразличия, интерпретируемое как данный уровень благосостояния. Возникает вопрос: можно ли по этому уровню восстановить потребительское предпочтение?

Пусть S — гиперповерхность в R^n. Нас интересуют такие функции полезности, для которых S — гиперповерхность безразличия. Подобных функций, конечно, очень много. Выделим среди них класс F вида

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$$

и будем искать в нем решение задачи. В заметке приводятся необходимые и достаточные условия для гиперповерхности $S \subset R^n$, при которых существует функция $u = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$ такая, что S — множество уровня $u = c$. Единственность (если $u = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$ существует, то она определена однозначно с точностью до линейного преобразования $u \to au + b$) установлена А. С. Тангяном [1]. Короткое доказательство этого свойства приводится здесь для полноты. Соответствующие функциям из F отношения предпочтения называются независимыми [2, 3], причем независимость не имеет строгого экономического обоснования, но является весьма правдоподобной и распространенной гипотезой (см., например, [3]).

Для композиции $z = g(f(x))$ двух функций $y = f(x)$ и $z = g(y)$ будем использовать категорное обозначение $g\circ f$. Отображение $R^n \to R$

$$(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 + \ldots + x_n$$

обозначим δ.

Теорема 1. *Пусть $x_{n+1} = h(x_1, \ldots, x_n)$, $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $n \geqslant 2$ — трижды дифференцируемая функция, задающая гиперповерхность S в пространстве $R^{n+1} = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ и*

$$a_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \min_{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i} h, \quad b_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \max_{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i} h.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

а) *существуют $n+1$ функций $u_i(x_i)$, $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, имеющих положительные производные, таких, что гиперповерхность S задается уравнением $u_1(x_1) + \ldots + u_{n+1}(x_{n+1}) = 0$;*

б) *функция h удовлетворяет системе дифференциальных уравнений и неравенств*

$$h_{x_i x_k} h_{x_j} - h_{x_j x_k} h_{x_i} = 0, \quad j \neq k, \quad i \neq k,$$

$$\frac{h_{x_i x_i x_j}}{h_{x_i}} - \frac{h_{x_i x_i} h_{x_i x_j}}{h_{x_i}^2} - \frac{h_{x_j x_i x_j}}{h_{x_j}} + \frac{h_{x_j x_i} h_{x_j x_j}}{h_{x_j}^2} = 0, \quad i \neq j, \quad h_{x_i}' < 0. \tag{1}$$

Доказательство.

1) $A \Rightarrow B$. Заметим, что $h = (-u_{n+1})^{-1} \circ \delta \circ (u_1 \times \ldots \times u_n) = g \circ \delta \circ (u_1 \times \ldots \times u_n)$, $g \overset{\text{def}}{=} (-u_{n+1})^{-1}$.

Дифференцируя h по x, получим: $h_{x_i} = (g' \circ \delta \circ (u_1 \times \ldots \times u_n)) u_{i_{x_i}}$. Рассмотрим выражение: $F_{ij} = \ln h_{x_i} - \ln h_{x_j} = \ln u_{i_{x_i}} + \ln u_{j_{x_j}}$. Теперь условие $F_{ij_{x_k}} = 0$ дает первую серию уравнений системы (1), а $F_{ij_{x_i x_j}} = 0$ – вторую. Наконец, $u_i' > 0 \Rightarrow h_{x_i}' < 0$.

2) $B \Rightarrow A$. Уравнение системы (1) можно переписать

$$\begin{gathered}(\ln h_{x_i} - \ln h_{x_j})_{x_k} = 0, \quad i \neq k,\ j \neq k, \\ (\ln h_{x_i} - \ln h_{x_j})_{x_i x_j} = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Отсюда получаем $\ln h_{x_j} - \ln h_j = C_i(x_i) - C_j(x_j)$ или

$$h_{x_i} = e^{C_i(x_i) - C_j(x_j)} h_{x_1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Общее решение системы (2) имеет вид

$$h = F(e^{C_1(x_1)} + \ldots + e^{C_n(x_n)}).$$

Следовательно, поверхность S задается уравнением

$$e^{C_1(x_1)} + \ldots + e^{C_n(x_n)} - F^{-1}(x_n) = 0.$$

Полагая $e^{C_i(x_i)} = u_i(x_i)$, $-F^{-1}(x_{n+1}) = u_{n+1}(x_{n+1})$, получим требуемое представление.

Остается доказать $u_i' > 0$. Из условия $h_{x_i}' < 0$ вытекает $F'(e^{C_i(x_i)})' < 0$. Значит, все $u_i'(x_i)$ имеют одинаковый знак и в случае, если этот знак минус, можно умножить $(u_1(x_1) + \ldots + u_{n+1}(x_{n+1}))$ на -1. Это завершает доказательство.

Теорема 2. *Пусть гиперповерхность S задается уравнением $u_1(x_1) + \ldots + u_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Тогда функции u_i определены однозначно с точностью до линейного преобразования $u_i \to \lambda u_i + \mu_i$.*

Доказательство. Предположим, что S задается также уравнением $v_1(x_1) + \ldots + v_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Решим оба уравнения относительно x_i

$$\begin{aligned}x_i = F_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) &= (-v_i)^{-1} \circ \delta \circ (v_1 \times \ldots \times v_{i-1} \times v_{i+1} \times \ldots \times v_{n+1}) = \\ &= (-u_i)^{-1} \circ \delta \circ (u_1 \times \ldots \times u_{i-1} \times u_{i+1} \times \ldots \times u_{n+1}).\end{aligned}$$

Рассматривая композицию $(-v_i) \circ F_i \circ (u_1^{-1} \times \ldots \times u_{i-1}^{-1} \times u_{i+1}^{-1} \times \ldots \times u_{n+1}^{-1})$, получаем

$$\delta \circ (v_1 \circ u_1^{-1} \times \ldots \times v_{i-1} \circ u_{i-1}^{-1} \times v_{i+1} \circ u_{i+1}^{-1} \times \ldots \times v_{n+1} \circ u_{n+1}^{-1}) = (-v_i) \circ (-u_i)^{-1} \circ \delta.$$

Дифференцируя по x_α, x_β, имеем

$$(-v_i) \circ (-u_i)^{-1}(x_i) = \lambda x_i + \mu_i \Rightarrow -v_i = -\lambda u_i + \mu_i,$$

что и требовалось доказать.

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Полтеровичу и А. С. Тангяну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тангян А. С.* Модель выявления потребительского предпочтения.— Экономика и матем. методы. 1979, т. XV, вып. 1.
2. *Gorman W. M.* The Structure of Utility Functions.— Rev. Econ. Studies, 1968, v. 35, № 4.
3. *Koopmans T. C.* Representations of Preference Ordering with Independent Components of Consumption.— In: Decision and Organisation. Amsterdam: 1972.
4. *Волконский В. А.* Модели согласованного планирования платежеспособного спроса.— Экономика и матем. методы, 1973, т. IX, вып. 4.

Поступила в редакцию
24 I 1980

ПРОГРАММА, РЕАЛИЗУЮЩАЯ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

ИВЛЕВ В. И.

(Москва)

Программа составлена в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ). Предназначена для решения задачи линейного целочисленного программирования с помощью асимптотического алгоритма [1].

Рассматривается задача целочисленного линейного программирования: $c^{\mathrm{T}}x\to\min$, $Ax=b$, $x\geqslant 0$ — целые, где A — целочисленная $(m\times n)$-матрица; c — целочисленный n-вектор; x — n-вектор.

Программа, реализующая асимптотический алгоритм, состоит из отдельных блоков (подпрограмм). Самостоятельный интерес представляют подпрограмма для приведения целочисленной квадратной матрицы к нормальной форме Смита и подпрограмма решения задачи групповой минимизации с опорными пометками групповых элементов [2—4]. Программа составлена на алгоритмическом языке ФОРТРАН-ЦЕРН для БЭСМ-6. В упомянутых подпрограммах не применяются стандартные программы математического обеспечения БЭСМ-6, что дает возможность использовать разработанные подпрограммы на других ЭВМ.

Время счета	Алгоритм		
	Т. Ху	использующий опорные пометки	
		1-я модификация	2-я модификация
$D=64$, $r=3$	~2,5 сек.	~1,5 сек.	~1,6 сек.
$D=256$, $r=5$	~83 сек.	~26,5 сек.	~25 сек.

Время, необходимое для реализации алгоритма приведения целочисленной квадратной матрицы C к нормальной форме Смита, зависит от размерности N матрицы C и величины ее определителя D. Для наших примеров оно составило при $N=30$ и $D=100$ около 20 сек., а при $N=60$ и $D=100$ — 2 мин.

Время решения задачи групповой минимизации обусловлено модификацией алгоритма. Рассматривались алгоритм Т. Ху и две модификации алгоритма, использующего опорные пометки групповых элементов [2]. Предполагается, что группа G представляется как прямая сумма r циклических подгрупп с d_k, $k=1,\ldots,r$, элементами в каждой подгруппе и $\prod_{k=1}^{r} d_k=D$.

Время работы алгоритмов для двух примеров без учета времени трансляции программы (центральным процессором) приведено в таблице для технически усовершенствованных по сравнению с [4] модификаций подпрограмм.