ЛИТЕРАТУРА

1. Численные методы условной оптимизации. М.: Мир, 1977.
2. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию
31 X 1979

О ТЕОРЕМЕ ЭРРОУ ДЛЯ АЛГЕБРЫ КОАЛИЦИЙ

Тангян А. С.

(Москва)

В работе Т. Армстронга [1] строится модель группового выбора К. Эрроу [2] с ограничениями на индивидуальные предпочтения. На множестве участников V рассматривается коалиционная структура, задаваемая булевой алгеброй $\mathfrak{A}$ (системой подмножеств множества участников, замкнутой относительно операций взятия конечного объединения, пересечения и дополнения), которая и ограничивает дифференциацию участников по предпочтениям. Предполагается, что участники, предпочитающие одну альтернативу другой, всегда должны образовывать коалицию – элемент алгебры. Все остальные компоненты модели К. Эрроу оставлены без изменений.

В качестве предпочтений рассматривается класс $\mathfrak{R}$ всех слабых упорядочений на множестве альтернатив X $(|X|)\geqslant 3$ — бинарные отношения $R\subset X\times X$, асимметричные (из $(x, y)\in R$ для x, $y\in X$ следует $(y, x)\notin R$) и отрицательно транзитивные (из $(x, y)\notin R$ и $(y, z)\notin R$ для x, y, $z\in X$ следует $(x, z)\notin R$). Множеством состояний модели объявляются так называемые профили – отображения f: $V\to\mathfrak{R}$, измеримые относительно алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. такие, что $\{v\in V$: $(x, y)\in f(v)\}\in\mathfrak{A}$ для любых x, $p\in X$. Агрегирующей функцией Эрроу * называется отображение σ: $F\to\mathfrak{R}$ такое, что: 1) соблюдается принцип единогласия: для x, $y\in X$ и $f\in F$ из $(x, y)\in f(v)$ для всех $v\in V$ следует $(x, y)\in\sigma(f)$; 2) групповое предпочтение на паре альтернатив не зависит от индивидуальных предпочтений на других альтернативах, т. е. если на паре альтернатив x, $y\in X$ два профиля f, $g\in F$ совпадают: $f(v)\cap\{x, y), (y, x)\}=g(v)\cap\{(x, y), (y, z)\}$ для всех $v\in V$, то при этих профилях на этой паре альтернатив совпадают и групповые предпочтения: $\sigma(f)\cap\{(x, y), (y, x)\}=\sigma(g)\cap\{(x, y), (y, x)\}$. Основной результат Т. Армстронга (предложение 3.2) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством агрегирующих функций Эрроу и множеством ультрафильтров булевой алгебры коалиций (напомним, что множество H непустых элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется ультрафильтром, если а) из $A\in H$, $B\in\mathfrak{A}$ и $A\subset B$ следует $B\in H$; б) из A, $B\in H$ следует $A\cap B\in H$; в) из $A\in\mathfrak{A}$ следует либо $A\in H$, либо $A^c\in H$). Однако приводимое доказательство содержит ошибку: заключительный шаг основан на ложном утверждении, что $g_2(v)=\{(y, z), (z, x)\}\cup p$, где $(x, y, z)\in X$, а $p=[X\setminus\{x, y, z\}]\{x, y, z\}]$,— слабое упорядочение. Чтобы убедиться в обратном, для простоты будем считать, что $X=\{x, y, z\}$, т. е. $p=\varnothing$. Тогда заведомо $(y, x)\notin g_2(v)$, $(x, z)\notin g_2(v)$ и $(y, z)\in g_2(v)$, вопреки условию отрицательной транзитивности слабого упорядочения. Исправить эту ошибку невозможно, так как в принятых предположениях теорема о биекции не верна. Не случайно поэтому А. Кирман и Д. Зондерман [3], чье доказательство использовал Т. Армстронг, ограничились лишь утверждением о сюръекции множества агрегирующих функций Эрроу на множество ультрафильтров.

Изучению аналогичной модели группового выбора посвящены работы [4–7], где, в частности, разбирается вопрос о биекции между множествами агрегирующих функций Эрроу и ультрафильтров. Как показано в [6], в предположениях Т. Армстронга каждому ультрафильтру соответствует целый класс агрегирующих функций Эрроу, состоящий по меньшей мере из двух представителей (предложения 9 и 10). Чтобы множества агрегирующих функций Эрроу и ультрафильтров привести во взаимно-однозначное соответствие, необходимо изменить предпосылки самой модели. Для этого в [6] расширяется класс предпочтений (рассматривается множество $\mathfrak{R}$ асимметричных и транзитивных бинарных отношений на X), содержащий, как известно, слабые упорядочения (транзитивное отношение P на X – это такое, что для x, y, $z\in X$ из $(x, y)\in P$ и $(y, z)\in P$ следует $(x, z)\in P$). Множество профилей (ситуаций) F определяется как совокупность измерительных отображений f: $V\to\mathfrak{R}$, а агрегирующая функция Эрроу (общественная функция полезности) – как отображе-

---

* Arrow Social Welfare Function в [1].

ние σ: $F\to\mathfrak{R}$, удовлетворяющее помимо условий 1)–2) также и такому: если для профиля $f\in F$ предпочтения $f(v)$ всех участников $v\in V$ являются слабыми упорядочениями, то и соответствующее групповое предпочтение $\sigma(f)$ – слабое упорядочение. В такой модели группового выбора соответствие между множеством агрегирующих функций Эрроу и множеством ультрафильтров булевой алгебры коалиций уже взаимно-однозначно (теорема 1 в [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Armstrong T. E.* Arrow's Theorem with Restricted Coalition Algebras.— J. Math. Ec., 1980, v. 7, № 1.
2. *Arrow K.* Social Choice and Individual Value. N. Y., 1963.
3. *Kirman A., Sonderman D.* Arrow's Theorem, Many Agents and Invisible Dictators.— J. Ec. Th., 1972, v. 5, № 2.
4. *Тангян А. С.* Модели социального выбора с конечным и бесконечным числом участников. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979.
5. *Тангян А. С.* Агрегирование в модели социального выбора. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979.
6. *Тангян А. С.* Иерархическая модель группового выбора.– Экономика и матем. методы, 1980, т. XVI, вып. 3.
7. *Тангян А. С.* Переход к бесконечному числу участников в модели группового выбора.– Экономика и матем. методы, 1981, т. XVII, вып. 1.

Поступила в редакцию
29 IV 1980

МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА О ТРИАНГУЛЯЦИИ МАТРИЦЫ

Бурдюк В. Я.

(Днепропетровск)

1. Постановка задачи. Заданы множество $N=\{1,\ldots,n\}$, вещественная $n\times n$-матрица $a=(a_{ij})=(a[i,j])$ и функционал

$$f=f(S,a)=\min_{1\leq p<q\leq n}\{a[S[p],S[q]]\},$$

где S – произвольная перестановка множества N.

Требуется среди $n!$ перестановок S найти перестановку $S_{\max}$, которая максимизирует функционал f. Другими словами, нужно, пользуясь одинаковыми переупорядочениями строк и столбцов квадратной матрицы, максимизировать минимальный элемент выше ее главной диагонали. Эта задача даст возможность решить и задачу минимизации (при помощи одинакового переупорядочения строк и столбцов квадратной матрицы) максимального элемента над ее главной диагональю, ибо

$$\max_{p<q}\{a[S[p],S[q]]\}=-\min_{p<q}\{-a[S[p],S[q]]\}.$$

Ниже предложен алгоритм построения при любом $\varepsilon>0$ такой перестановки S_0, что $|f(S_0)-f(S_{\max})|\leq\varepsilon$. Количество элементарных действий (сравнений, сложений чисел) в этом алгоритме не больше $(1+\log_2(\beta/\varepsilon))c_1n^2$, а объем дополнительной памяти – (n^2+2n) ячеек. Заметим, что если, например, все числа a_{ij} имеют два знака после запятой, то по алгоритму получим S_0, равное $S_{\max}$, задав $\varepsilon=0{,}009$.

Известно, что обычная задача о триангуляции матрицы (см. [1]), т. е. задача максимизации функционала

$$f_1=f_1(S,a)=\sum_{p<q}a[S[p],S[q]],$$

решается значительно сложнее.

2. Алгоритм. Считая заданными $\varepsilon>0$ и $n\times n$-матрицу $a=(a_{ij})=(a[i,j])$, выполняем следующие действия.

Ш а г 1. Задаем $n\times n$-матрицу $d=(d_{ij})=(d[i,j])$, где $d_{ii}=0$, $d_{ij}=1$, $i\neq j$. Просматривая элементы матрицы a, расположенные ниже (выше) главной диагонали, находим среди них наибольший M_- (соответственно M_+) и наименьший m_- (соответственно m_+). Полагаем $M:=\max(M_-,M_+)$, $m:=\max(m_-,m_+)$. Если $m=m_+$, то $S_0:=\langle 1,\ldots,n\rangle$, иначе $S_0:=\langle n,n-1,\ldots,1\rangle$.