

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА: РАЗВИТИЕ С НОРМАТИВНОЙ ВРЕМЕННОЙ ШКАЛОЙ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Беленький В.З.

(Москва)

Настоящая работа продолжает исследования автора в области стационарных (с бесконечным горизонтом) линейных моделей экономической динамики типа Неймана-Гейла, в которых описание экономической системы дается в терминах производственного отображения ("технологии"). Предлагается новый подход к понятию "оптимальная стратегия развития", исследована соответствующая модель.

Хорошо известны два подхода к понятию оптимальности. Первый рассматривает замкнутую систему, технологическое описание которой включает в себя воспроизводство всех необходимых для развития ресурсов, в том числе трудовых. Такая система не имеет никаких внешних целей, ее естественная самоцель — развитие с максимальным темпом. Это наиболее абстрактная и идеализированная схема, но зато именно она позволила выработать такие фундаментальные понятия, как равновесие, луч (неймановский) сбалансированного роста. Позднее аппарат замкнутой модели пополнился понятиями "прямой и обратный операторы Беллмана", "эффективный функционал" ("потенциал") модели и т.д.

Второй подход предполагает явный учет потребления. Здесь описание становится открытым, потребление выводится из "технологии" и описывается с помощью функции полезности $U(c)$. Предлагаемое в данной работе новое понятие оптимальности развивается в рамках этого подхода, поэтому остановимся на нем несколько подробнее. Выделим два типа моделей.

Модель первого типа — открытая — связывает понятие оптимальности с максимизацией дисконтированной суммарной полезности

$$\sum_{t=0}^T \mu^t U(c_t) \rightarrow \max. \quad (1)$$

При этом субъекты потребления — трудовые ресурсы — выводятся из технологического описания, потребление теряет производственный характер, функция U интерпретируется как полезность непроизводственного потребления. Моделями такого типа охватываются ситуации, когда трудовые ресурсы N не являются фактором, лимитирующим рост производства (N_t растет быстрее, чем экономика). Уязвимое место критерия (1) — выбор значения коэффициента дисконтирования μ . Этот выбор трудно объективировать, но от него существенно зависит соотношение уровней потребления разных "поколений". При малых μ все будет быстро "проедено" и потомкам ничего не остается; при больших μ возникает так называемый эффект отложенного потребления, когда $U(c_t) \approx 0$ при t , не слишком близких к концу планового периода T .

Модель второго типа — полуоткрытая — описывает ситуации, в которых трудовые ресурсы лимитируют рост производства и ее технология включает соответствующие

ограничения. При этом рост трудовых ресурсов задается вне технологии, экзогенно, в простейшем случае $N_t = N_0 \lambda^t$. В качестве критерия оптимальности здесь выступает функционал суммарного (недисконтированного) душевого потребления

$$\sum_{t=0}^T \frac{1}{N_0 \lambda^t} U(c_t) \rightarrow \max. \quad (2)$$

Важнейшим теоретическим результатом этой модели является теорема о магистрали в потреблении, утверждающая, что оптимальная траектория проходит (при больших T) вдоль так называемого золотого луча, на котором достигается равномерный, с темпом λ , сбалансированный рост.

Предлагаемая нами модель в описательной части содержит черты всех названных подходов. Ее принципиальная особенность в нетрадиционной постановочной части — формулировка критерия оптимальности.

Статья состоит из трех разделов. 1 — принципиально постановочная часть; 2 — анализ модели с поясняющими примерами; 3 — сопряженная (двойственная) модель. Последний раздел содержит основной результат (утверждение 3, п. 3.4) о связи оптимальных траекторий прямой и двойственной задач. Отметим также представляющий самостоятельный интерес п. 3.2, где введен оператор равномерного дележа и получено его двойственное представление (лемма 1). Вопрос о существовании магистрали остается открытым.

1. МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ С НОРМАТИВНОЙ ВРЕМЕННОЙ ШКАЛОЙ НЕПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ

1. Описание системы. Экономическая система описывается традиционно с помощью гейловской технологии Z — выпуклого замкнутого конуса в R_+^{2n} , удовлетворяющего стандартным условиям [1, с. 392]. В равносильной форме технология может быть задана производственным отображением ω пространства "продуктов" R_+^n в себя

$$\omega(x) = \{y \in R_+^n \mid (x, y) \in Z\}, \quad x \in R_+^n;$$

в паре (x, y) x — исходное состояние; y — одно из состояний, доступных через единицу времени. Считается, что возможные траектории развития системы определяются технологией ω полностью; существенно, что трудовые ресурсы являются также одной из компонент вектора состояния. Это означает, что трудовые ресурсы наряду с остальными продуктами воспроизводятся в системе и используются в процессе производства. В этом смысле модель замкнута, и к ней применимы все понятия и результаты, относящиеся к замкнутым линейным моделям Неймана—Гейла.

Пусть, далее, на пространстве продуктов R_+^n определена функция полезности $U: R_+^n \rightarrow R_+$; значение $U(c)$ интерпретируется в данной работе как полезность вектора непроизводственного потребления $c \in R_+^n$. Остановимся на этом несколько подробнее.

В описываемой модели трудовые ресурсы — это люди (население), выступающие одновременно и как работники, и как "чистые потребители". Воспроизводство трудовых ресурсов требует затрат по поддержанию некоторого жизненного уровня работников (питание, жилье, социальная защита, образование, здравоохранение и т.п.), а также для повышения их квалификации. Эти затраты суть производственное потребление, и они считаются включенными в описание технологии Z . Но те же люди рассматриваются как потребители со своими чисто человеческими "прихотями" — склонностью к предметам роскоши, путешествиям, спорту, увлечениями (хобби) и вообще желанием просто жить и творить, не заботясь о куске хлеба. Такого рода потребление — непроизводственное, оно находится вне экономики и является по отношению к ней "внешней" нагрузкой. В то же время именно оно и составляет смысл жизни; с этой точки зрения функция U описывает высшие "вечные" ценности человеческого бытия. Вместе с тем предполагается, что непроизводственное потребление c "черпается" из тех же источников, что и производственное, т.е. $c \in R_+^n$, причем

$0 \leq c \leq x$, где x — текущее состояние системы. Таким образом, траектории системы суть последовательности $\xi := \{x_t, c_t\}$, $t = 0, 1, \dots$, удовлетворяющие условиям

$$x_0 \text{ задано, } 0 \leq c_t \leq x_t, \quad x_{t+1} \in \omega(x_t - c_t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Следующей предпосылкой модели, существенно упрощающей ее анализ, является предположение о постоянном, экзогенно заданном, темпе роста населения

$$N_t = N_0 \lambda^t, \quad \lambda > 0. \quad (4)$$

Подчеркнем, что N_t — это физический объем населения (количество потребителей). Трудовые ресурсы, измеряемые в каких-либо стандартных единицах производительности, могут расти быстрее за счет повышения квалификации (возрастающая со временем производительность человека-работника).

Итак, рассматриваемая система описывается тройкой $\{Z \text{ (или } \omega), U, \lambda\}$. Функцию U будем предполагать принадлежащей классу W монотонных линейно-однородных (первой степени) функций над R_+^n . Кроме того, предполагается, что U всегда выпукла вверх, т.е. $U \in \hat{W}$, где $\hat{W} \subset W$ — подкласс выпуклых вверх функций.

2. Критерий развития. Пусть $\rho = \{\rho_t, t = 0, 1, \dots\}$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел, мыслимая как заданная временная шкала потребления. С каждой траекторией $\xi = \{x_t, c_t\}$ свяжем число

$$\theta = \theta(\xi) := \min_{t \geq 0} \frac{1}{\rho_t} \frac{U(c_t)}{N_t} = \min_{t \geq 0} \max \left\{ s \mid \frac{1}{\rho_t} \frac{U(c_t)}{N_t} \geq s \right\}. \quad (5)$$

Оно может интерпретироваться как уровень полезности душевого потребления, измеренный в шкале ρ , гарантированный всем "поколениям" $t = 0, 1, \dots$. Выражение (5) вскрывает и смысл шкалы ρ : она задает соотношение полезностей потребления разных поколений; ее можно назвать нормативной шкалой дисконтирования полезности.

Обозначим через $Tr(x)$ пучок траекторий (3), выходящих из начальной точки $x_0 = x$, и поставим задачу

$$\theta(\xi) \rightarrow \max_{\xi \in Tr(x)} =: I(x). \quad (6)$$

Из содержательного смысла модели ясно, что в "правильной" (регулярной) модели на оптимальной траектории задачи (6) приведенный уровень душевого потребления будет постоянен на всей траектории, т.е.

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{U(c_t)}{N_t} \equiv I(x).$$

В самом деле, если бы для некоторого t_1 этот уровень был выше $I(x)$ (ниже он быть не может по определению), то можно было бы его понизить, увеличив потребление всех остальных поколений $t = t_1$, но это противоречит условию оптимальности, и поэтому невозможно.

3. Основная стационарная модель. Исходя из общей концепции развития сформулируем основную модель. Пусть:

1) численность населения N_t удовлетворяет закону роста (4), причем начальное значение принимается за единицу измерения, т.е. $N_0 = 1$.

2) полезность дисконтируется с постоянным коэффициентом, т.е. $\rho_t = \rho^t$, где $\rho = \text{const} > 0$ — плановый темп роста душевого потребления.

При этих предпосылках, учитывая еще линейную однородность функции U , получим критерий (6) в форме

$$\theta(\xi) = \min_{t \geq 0} \delta^{-t} U(c_t) \rightarrow \max_{\xi \in Tr(x)} =: I(x), \quad \delta := \lambda \rho. \quad (7)$$

В отличие от общего случая (6) задача (7) стационарна: функция I является реше-

нием стационарного (однородного во времени) уравнения Беллмана

$$\Phi(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \min [U(c), \frac{1}{\delta} \Gamma \Phi(x - c)], \quad \Phi \in W, \quad (8)$$

где

$$\Gamma \Phi(x) := \max_{y \in \omega(x)} \Phi(y), \quad \Phi \in W, \quad x \in R_+^n. \quad (9)$$

Уравнение (8) является основным, его решение определяет для каждого состояния $x \in R_+^n$ уровень полезности $I(x)$, оптимальный вектор потребления $c = C(x)$, максимизирующий правую часть (8) при $\Phi = I$, и оптимальный ход

$$Y(x) := \text{Arg max}_{y \in \omega(x - C(x))} I(y). \quad (10)$$

Траектория $\zeta \in Tr(x)$ задачи (8) строится по правилу

$$x_0 = x, \quad c_t := C(x_t), \quad x_{t+1} := Y(x_t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Траекторию ζ , на которой для всех t выполнены соотношения

$$I(x_t) = U(c_t) = \frac{1}{\delta} \Gamma I(x_t - c_t) = \frac{1}{\delta} I(x_{t+1})$$

назовем равномерно сбалансированной (РС-траектория) (существование РС-траекторий будет показано ниже). На РС-траекториях

$$I(x_t) = U(c_t) = \delta^t I(x_0) \quad \forall t, \quad (12)$$

т.е. удельная душевая полезность $\lambda^{-t} U(c_t)$ растет во времени со строго заданным плановым темпом ρ . Еще раз подчеркнем, что в стационарной модели значения $I(x)$, $C(x)$, $Y(x)$ зависят только от состояния $x \in R_+^n$, но не от момента времени, в который это состояние достигнуто.

Исходя из соотношения $I(x) = U(C(x))$ назовем функцию $I(\cdot)$ нормативным индексом полезности (НИП); он полностью определяется тройкой $\{\omega, U, \delta\}$. Этот термин подчеркивает общий нормативный характер модели.

2. АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ

1. **Выпуклость нормативного индекса.** Прежде всего необходимо сделать одно уточнение. Уравнение (8) может иметь много решений, в частности тривиальным является $\Phi \equiv 0$. Но во множестве всех решений существует максимальное $\tilde{\Phi}$, т.е. такое, что $\Phi \leq \tilde{\Phi}$ для любого решения Φ . Неравенство $\Phi_1 \geq \Phi_2$ означает, естественно, что $\Phi_1(x) \geq \Phi_2(x) \quad \forall x \in R_+^n$.

В самом деле, если рассматривать правую часть (8) как оператор $L: W \rightarrow W$, действующий на функцию Φ , то этот оператор, очевидно, монотонен ($L\Phi_1 \geq L\Phi_2$ если $\Phi_1 \geq \Phi_2$), поэтому последовательность

$$\Phi_0 := \infty, \quad \Phi_{k+1} := L\Phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

убывает и, таким образом, сходится к некоторой функции $\tilde{\Phi}$. Предельная функция входит в класс W (см. [2, с. 15]), поэтому $\tilde{\Phi}$ — решение уравнения (8). Сопоставляя любое другое решение Φ с членами последовательности (13), заключаем, ввиду монотонности

$$\Phi \leq \Phi_0 \Rightarrow \Phi \leq \Phi_k \quad \forall k \Rightarrow \Phi \leq \tilde{\Phi},$$

т.е. решение $\tilde{\Phi}$ максимально.

Из содержательного смысла задачи ясно, что именно максимальное решение будет нормативным индексом, определенным формулой (7), т.е. $I = \tilde{\Phi}$. Это рассуждение доказывает одновременно, что НИП существует и единствен; кроме того, так как в (13) $\Phi_1 = U$, то $I \leq U$.

Утверждение 1. НИП I — выпуклая вверх функция, $I \in \hat{W}$, он нетривиален ($I \neq 0$) тогда и только тогда, когда $\delta < \alpha$, где $\alpha = \alpha_\omega$ есть неймановский темп роста технологии ω (в предположении регулярности технологии, см. доказательство)*.

Отсюда вытекает экономически очевидное следствие: равномерно дисконтированное душевое потребление $\frac{1}{\lambda^t} U(c_t)$ может возрасти ($\rho > 1$) тогда и только тогда, когда темп роста населения λ строго меньше темпа роста технологии α , $\lambda < \alpha$.

2. Примеры. Чтобы лучше прочувствовать модель, рассмотрим простые примеры.

Пример 1. Пусть технология ω задана формулой

$$\omega(x) := \{y \in R_+^n \mid \pi y \leq \alpha \Lambda_a(x)\}, \quad x \in R_+^n, \quad (14)$$

где при положительном векторе $a \in R_+^n$

$$\Lambda_a(x) := \min_i \frac{x_i}{a_i}, \quad x \in R_+^n \quad (15)$$

(i — номер компоненты); $\pi \in R_+^n$ — положительный вектор цен, нормированный условием $\pi a = 1$. В [3] показано, что (14) является "бюджетной" аппроксимацией леонтьевской технологии

$$\omega_A(x) := \{y \in R_+^n \mid Ay \leq x\}, \quad x \in R_+^n,$$

где $A(n \times n)$ -матрица Леонтьева прямых затрат, причем (α, a, π) в (14) суть r^{-1} ($r = r(A)$ — спектральный радиус матрицы) и соответственно правый и левый собственные векторы. В модели (14) оператор Беллмана (9) действует по формуле

$$G\Phi(x) = \max_{\pi y \leq \alpha \Lambda_a(x)} \Phi(y) = \alpha \Lambda_a(x) \gamma, \quad (16)$$

где

$$\gamma = \gamma(\Phi) := \max_{\pi y \leq 1} \Phi(y). \quad (17)$$

Пусть, далее, функция полезности U аналогична (15), но с некоторым другим вектором b , т.е. $U = \Lambda_b$, причем для удобства нормируем b условием $\pi b = 1$. В силу (16) уравнение (8) приобретает вид

$$\Phi(x) = \max_{c \leq x} \min [\Lambda_b(c), \epsilon \Lambda_a(x - c)], \quad \epsilon := \frac{\alpha}{\delta} \gamma(\Phi), \quad (18)$$

и, следовательно, его решение определено правой частью с точностью до параметра ϵ . При фиксированном ϵ значение правой части (18)

$$\begin{aligned} \max_{c \leq x} \max \left\{ s \mid c \geq sb, \quad x - c \geq \frac{s}{\epsilon} a \right\} &= \max \left\{ s \mid x \geq \frac{s}{\epsilon} a + sb \right\} = \max \left\{ s \mid x \geq s \left(\frac{1}{\epsilon} a + b \right) \right\} = \\ &= \Lambda_{((a/\epsilon) + b)}(x); \end{aligned}$$

таким образом, $\Phi = \Lambda_{a/\epsilon + b}$. Для нахождения ϵ воспользуемся (17)

$$\frac{\delta \epsilon}{\alpha} = \gamma(\Phi) = \max_{\pi y = 1} \Lambda_{((a/\epsilon) + b)}(y) = \frac{1}{\pi((a/\epsilon) + b)} = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}$$

откуда (при $\delta < \alpha$) $\epsilon = (\alpha/\delta) - 1$.

Итак, окончательно, в модели (14) с функцией полезности $U = \Lambda_b$ (и при условии $\pi a = \pi b = 1$)

$$I = \Lambda_e, \quad e := (a/\epsilon) + b, \quad \epsilon := (\alpha/\delta) - 1. \quad (19)$$

*Доказательство этого и последующих утверждений см. в Приложении; см. также Замечание на с. 124.

Пример 2. (общая сепарабельная модель). Сепарабельная технология общего вида

$$\omega(x) := \{y \in R_+^n | g(y) \leq \alpha G(x)\}, \quad x \in R_+^n, \quad (20)$$

задается парой "бюджетных" функций $g, G \in W$, выпуклых соответственно вниз и вверх, и скаляром $\alpha > 0$. Предполагается, что функция g, G взаимно нормированы

$$\max_{x \in R_+^n} \frac{G(x)}{g(x)} = \max_{g(x) \leq 1} G(x) = 1; \quad (21)$$

тогда α — неймановский темп роста технологии (20).

Как и в примере 1.

$$\Gamma\Phi(x) = \alpha G(x)\gamma, \quad \gamma = \gamma(\Phi) := \max_{g(y) \leq 1} \Phi(y),$$

поэтому основное уравнение (8) приобретает вид

$$\Phi(x) = \max_{c \leq x} \min [U(c), \epsilon G(x - c)], \quad \epsilon := \frac{\alpha}{\delta} \gamma(\Phi), \quad (22)$$

и, следовательно, опять решение Φ определено правой частью с точностью до скаляра ϵ . Положим $\Psi := \Phi/\epsilon$, тогда функция Ψ дается выражением

$$\Psi(x) = \max_{c \leq x} \min \left[\frac{1}{\epsilon} U(c), G(x - c) \right] =: \Psi_\epsilon(x) \quad (23)$$

при подходящем значении ϵ , которое определяется условием $\gamma(\Psi) = \frac{1}{\epsilon} \gamma(\Phi) = \frac{\delta}{\alpha}$, т.е.

$$\max_{g(y) \leq 1} \Psi_\epsilon(y) = \frac{\delta}{\alpha}. \quad (24)$$

Ясно, что Ψ_ϵ убывает по $\epsilon \in (0, \infty)$, причем $\Psi_{\epsilon=0} = G$, $\Psi_{\epsilon=\infty} = 0$, поэтому с учетом (21) при $\delta < \alpha$ значение ϵ , удовлетворяющее условию (24), существует и единственно.

Итак, в сепарабельной модели (20) НИП I строится следующим образом: 1) находим значение ϵ , удовлетворяющее условию (24), в котором параметрическая функция Ψ_ϵ определена в (23); 2) полагаем $I := \epsilon \Psi_\epsilon$.

3. Гипотеза о магистрали. Обратимся к анализу оптимальных РС-траекторий сепарабельной модели. Переходное отображение (10) имеет вид

$$Y(x) = \underset{g(y) \leq \alpha G(x - C(x))}{\text{Arg max}} I(y) = \alpha G(x - C(x)) \hat{x}, \quad x \in R_+^n$$

где вектор

$$\hat{x} := \underset{g(y) \leq 1}{\text{arg max}} I(y)$$

не зависит от x , при этом в силу равномерной сбалансированности имеем из (22) $G(x - C(x)) = (1/\epsilon) I(x)$, следовательно, $Y(x) = (\alpha/\epsilon) I(x) \hat{x}$, $x \in R_+^n$.

Таким образом, из любого состояния $x \in R_+^n$ система за один шаг выходит на луч $l := \{s\hat{x} | s \geq 0\}$ в точку, пропорциональную значению НИП, и далее движется по лучу l . Отметим, что темп движения по лучу равен δ , ибо с учетом (24), $Y(\hat{x}) = (\alpha/\epsilon) I(\hat{x}) \hat{x} = \alpha \Psi(\hat{x}) \hat{x} = \delta \hat{x}$.

Это означает, что луч l — магистраль сепарабельной модели, причем жесткая: выход на магистраль происходит сразу, на первом шаге. Экономически вектор $\hat{x}$ и соответствующий ему вектор потребления $\hat{c} = C(\hat{x})$ образуют сбалансированную пару $(\hat{x}, \hat{c})$, обеспечивающую нормативный темп роста δ

$$I(\hat{x}) = U(\hat{c}) = (1/\delta) I(\hat{y}), \quad \hat{y} = \delta \hat{x} \in Y(\hat{x} - \hat{c}).$$

В "Теореме о магистрали в потреблении" (в полуоткрытой модели, см. вводный раздел статьи) подобная пара названа "золотым дуэтом" [4, § 14.2].

Необходимыми и достаточными условиями сбалансированности пары $(\hat{x}, \hat{c})$ являются

$$I(\hat{x}) = U(\hat{c}), \quad \delta \hat{x} \in \omega(\hat{x} - \hat{c}). \quad (25)$$

Возникают два вопроса: 1) существует ли сбалансированная пара (25) в общей модели (8), 2) если такая пара существует, будет ли луч $l = \{s\hat{x}\}$ магистралью (аттрактором) для оптимальных РС-траекторий? Ответ на первый вопрос утвердителен.

Утверждение 2. В модели (8) пара $(\hat{x}, \hat{c})$, сбалансированная в смысле (25), существует (возможно, не единственная).

Второй вопрос остается открытым, в этом состоит гипотеза о магистрали.

3. СОПРЯЖЕННОЕ (ДВОЙСТВЕННОЕ) УРАВНЕНИЕ

В этом разделе будет получено уравнение, сопряженное с (8), в котором основной переменной выступает не вектор продуктов x , а цены $p \in R_+^n$. Траектории прямой и двойственной задач оказываются тесно связанными.

1. Некоторые факты из теории сопряженных функций. Для $\Phi \in \hat{W}$ сопряженная функция Φ^* определяется формулой

$$\Phi^*(p) = \min_{x \in R_+^n} \frac{px}{\Phi(x)} = \min_{x \in D(\Phi)} px, \quad p \in R_+^n, \quad (26)$$

где

$$D(\Phi) = \{x \in R_+^n \mid \Phi(x) \geq 1\}, \quad \Phi \in \hat{W}; \quad (27)$$

множество $D(\Phi)$ выпукло. Функция Φ^* также входит в $\hat{W}$, поэтому имеет смысл второе сопряжение, и выполняется равенство

$$\Phi^{**} = \Phi \quad \forall \Phi \in \hat{W}, \quad (28)$$

т.е. функции Φ и Φ^* взаимно сопряжены.

Отображение

$$p \rightarrow \text{Arg min}_{x \in D(\Phi)} px = \{x \mid \Phi(x) = 1, \quad px = \Phi^*(p)\} =: \text{Grad } \Phi^*(p) \quad (29)$$

определяет множество обобщенных градиентов функции $\Phi^* \in \hat{W}$ в точке p ; оно линейно однородно нулевой степени, причем когда p пробегает пространство R_+^n , вектор $x = \text{grad } \Phi^*(p)$ пробегает всю линию уровня $\Phi(x) = 1$. В силу (28) имеем аналогично

$$x \rightarrow \text{Arg min}_{p \in D(\Phi^*)} px = \{p \mid \Phi^*(p) = 1, \quad px = \Phi(x)\} = \text{Grad } \Phi(x).$$

Обозначим через $N_x(\Phi)$ конус векторов p , нормальных к линии уровня функции Φ в точке x

$$N_x(\Phi) = \{p = s \text{ Grad } \Phi(x) \mid s \geq 0\} = \{p \in R_+^n \mid px = \Phi^*(p) \Phi(x)\}, \quad x \in R_+^n \quad (30)$$

и отметим принцип взаимности

$$p \in N_x(\Phi) \iff x \in N_p(\Phi^*) \iff px = \Phi^*(p) \Phi(x), \quad (31)$$

Векторы x, p , связанные соотношениями (31), будем называть Φ — взаимными. Экономически условия взаимности означают, что при функции полезности Φ и ценах p вектор x — вектор спроса.

2. **Оператор равномерного дележа.** Введем в рассмотрение оператор S (от англ. share — делить поровну), ставящий в соответствие каждой паре функций $\Phi_1, \Phi_2 \in \hat{W}$ функцию S

$$S[\Phi_1, \Phi_2](x) = \max_{\substack{x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = x}} \min [\Phi(x_1), \Phi(x_2)], \quad x \in R_+^n;$$

легко убедиться, что $S \in \hat{W}$. Операция S получает интерпретацию дележа, если считать,

что Φ_1, Φ_2 — функции полезности двух участников, x — вектор, подлежащий дележу. Совместная полезность $S(x)$ есть значение функционала в задаче

$$\Phi(x_1) \geq s, \quad \Phi(x_2) \geq s, \quad x_1 x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq x; \quad s \rightarrow \max;$$

она оказывается, грубо говоря, вдвое меньше каждой из индивидуальных полезностей.

Очевидно, что всегда существует равномерный оптимальный дележ, т.е. такой, что $\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = S(x)$. (32')

Менее очевидно существование равномерно сбалансированного РС-дележа, т.е. удовлетворяющего кроме (32') условию

$$x_1 + x_2 = x. \quad (32'')$$

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$S^* = \Phi_1^* + \Phi_2^*, \quad (33)$$

$$\text{Grad } S^* = \text{Grad } \Phi_1^* + \text{Grad } \Phi_2^*. \quad (34)$$

Из леммы следует, что РС-дележ вектора x существует и может быть реализован следующим образом с помощью произвольного вектора цен $p \in N_x(S)$. Обозначим $x' := x/S(x)$, тогда $S(x') = 1$ и, согласно (29), (31), $x' = \text{grad } S^*(p)$. В силу (34) найдутся векторы $x'_1 = \text{grad } \Phi_1^*(p)$, $x'_2 = \text{grad } \Phi_2^*(p)$, такие, что $x'_1 + x'_2 = x'$. Для этих векторов, согласно (29), будут выполнены равенства $\Phi_1(x'_1) = \Phi_2(x'_2) = 1$. Поэтому пара $(x_1, x_2 := S(x)(x'_1, x'_2))$ образует РС-дележ вектора x .

Лемма 2. Пусть $x = x_1 + x_2$ есть РС-дележ, и $p \in N_x(S)$. Тогда $p \in N_{x_i}(\Phi_i)$, $i = 1, 2$.

Замечание. Результаты п. 2 имеют самостоятельное значение. Они непосредственно переносятся на случай дележа между m участниками ($m \geq 1$) с оператором

$$S[\Phi_1, \dots, \Phi_m](x) := \max_{x_i \geq 0} \min_{x_1 + \dots + x_m \leq x} [\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_m(x_m)], \quad x \in R_+^n.$$

3. Сопряженное уравнение. Применяя результаты п. 2 к основному уравнению (8), которое можно записать в виде

$$\Phi = S[U, \frac{1}{\delta} \Gamma \Phi], \quad (35)$$

получим

$$\Phi^* = U^* + (\frac{1}{\delta} \Gamma \Phi)^* = U^* + \delta (\Gamma \Phi)^*. \quad (36)$$

Операция $(\Gamma \Phi)^*$ выражается в терминах двойственной модели Неймана — Гейла, которая задается отображением (см. [5, п. 4.5])

$$\omega^*(p) := \{q \in R_+^n \mid qy \leq px \quad \forall (x, y) \in Z\}, \quad p \in R_+^n, \quad (37)$$

порождающим соответствующий оператор Беллмана (ср. с. (9))

$$\Gamma^* \Phi^*(p) := \max_{q \in \omega^*(p)} \Phi^*(q).$$

Отметим, что двойственный темп роста α^* связан с прямым темпом α соотношением $\alpha^* = \alpha^{-1}$. Нетрудно проверить равенство

$$(\Gamma \Phi)^* = \Gamma^* \Phi^* \quad \forall \Phi \in \hat{W}, \quad (38)$$

используя которое, получаем из (36)

$$\Phi^* = U^* + \delta \Gamma^* \Phi^*, \quad \Phi^* \in \hat{W}. \quad (39)$$

Это и есть сопряженное уравнение относительно функции Φ^* (U^* находится по (26)). Как и прямое уравнение, оно может иметь много решений. Нас интересует

минимальное решение, получающееся как предел возрастающей последовательности

$$\Phi_0^* \equiv 0, \quad \Phi_{k+1}^* = L^* \Phi_k^*, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где L^* — оператор правой части (39). Эта последовательность сходится, так как она сопряжена сходящейся последовательности (13); ее предел — I^* .

Отметим, что существование РС-дележа для (35) означает существование равномерно сбалансированных траекторий для (8).

4. Связь между траекториями прямой и двойственной задач. Траекторией, порожденной решением I^* , назовем последовательность

$$p_0 - \text{задано}, \quad p_{t+1} = \arg \max_{q \in \omega^*(p_t)} I^*(q), \quad t = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Утверждение 3. Пусть $\{x_t, c_t\}$ есть РС-траектория задачи (8) и вектор цен p_0 I — взаимен с начальной точкой x_0 . Тогда траектория (40) двойственна к данной РС-траектории в следующем смысле: при всех $t = 0, 1, \dots$ пары (x_t, p_t) I -взаимны, пары (c_t, p_t) U -взаимны и выполняется равенство

$$p_{t+1} x_{t+1} = p_t (x_t - c_t). \quad (41)$$

Из утверждения 3 с учетом (29), (30), (12) следуют соотношения

$$a) \quad x_t \in \arg \min_{I(x) \geq I(x_t)} p_t x = I(x_t) \arg \min_{x \in D(I)} p_t x = \delta^t I(x_0) \text{ Grad } I^*(p_t), \quad (42)$$

$$b) \quad c_t \in \arg \min_{U(c) \geq U(c_t)} p_t c = \delta^t I(x_0) \text{ Grad } U^*(p_t),$$

однако, поскольку правые части в (42) неоднозначны, они, вообще говоря, не позволяют по траектории $\{p_t\}$ восстановить траекторию $\{x_t, c_t\}$.

5. Экономическая интерпретация. Равенство (41) выражает экономический "закон сохранения стоимости": в производственном периоде $(t, t+1)$ оценка конечного продукта x_{t+1} совпадает (в оптимальных ценах) с оценкой вектора $z_t = x_t - c_t$, направляемого в производство. Многократно итерируя (41), получим

$$p_t x_t = p_0 x_0 - \sum_{k=0}^{t-1} p_k c_k; \quad (43)$$

это — "финансовое сальдо": остаточная на момент t стоимость продуктов равна первоначальной стоимости за вычетом суммарного (за весь предшествующий период) потребления. Учитывая, что $p_t \sim (\alpha^*)^t = \alpha^{-t}$ (это следует из (40)), $x^t \sim \delta^t$ и поэтому $p_t x_t \sim (\delta/\alpha)^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, можно перейти в (43) к предельному равенству

$$p_0 x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t \quad (44)$$

с очевидной интерпретацией. В терминах сопряженных функций (44) имеет вид

$$I^*(p_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U^*(p_t);$$

это равенство получается из определения траектории (40) путем итерирования основного уравнения (39) и предельного перехода, аналогичного переходу (41)–(43)–(44).

Добавим, что если перейти к ценам $\tilde{p}_t$, нормированным условием $I^*(p) = 1$, т.е. положить $\tilde{p}_t = p_t / I^*(p_t)$, то из I -взаимности пары (x_t, p_t) следует

$$\tilde{p}_t = \text{grad } I(x_t), \quad \tilde{p}_t x_t = I(x_t) = \delta^t I(x_0).$$

В нормированных ценах оценка состояния x_t совпадает со значением НИП.

1. Доказательство утверждения 1. Сначала докажем, что $I \neq 0$ только при $\delta < \alpha$. Имеем на траектории (11) $I(x_t) \leq (1/\delta) I(x_{t+1})$, откуда следует, что если $I \neq 0$, то траектория $\{x_t\}$ растет с темпом, не меньшим δ . Так как максимальный возможный темп роста — α , то при $\delta > \alpha$ $I \equiv 0$. Если $\delta = \alpha$, то в предположении, что технология ω регулярна, т.е. обладает магистральным лучом с положительным направляющим (неймановским) вектором x^* , последовательность $\alpha^{-t} x_t$ сходится к некоторой точке γx^* ([6, теорема 14.7; 3, п. 2.2]). Но движение вдоль магистрального луча возможно только при нулевом потреблении, поэтому и в данном случае $I \equiv 0$. Если же $\delta < \alpha$, то при $x_0 > 0$ всегда существует траектория развития с равномерно отделенным от нуля потреблением; поэтому здесь $I(x) > 0$ при $x > 0$.

Для доказательства выпуклости I запишем оператор L правой части (8) в следующем виде (предполагая, что $\Phi \in \hat{W}$)

$$L\Phi(x) = \max_{c \leq x} \min_{h \in [0, 1]} [(1-h)U(c) + h \frac{1}{\delta} \Gamma\Phi(x-c)] = \min_h L_h \Phi(x), \quad (45)$$

где

$$L_h \Phi(x) := \max_{c \leq x} [(1-h)U(c) + h \frac{1}{\delta} \Gamma\Phi(x-c)]$$

(перестановка $\max$ и $\min$ допустима в силу [1, п. 1.5], так как $\Phi \in \hat{W} \Rightarrow \Gamma\Phi \in \hat{W} \Rightarrow [\dots] \in \hat{W}$). В [3, с. 22] показано, что оператор L_h сохраняет свойство выпуклости; но тогда, согласно (45), и оператор L сохраняет свойство выпуклости. Поскольку в последовательности (13) $\Phi_0 \in \hat{W}$ то $\Phi_k \in \hat{W} \forall k$, поэтому $I = \lim \Phi_k \in \hat{W}$.

2. Доказательство утверждения 2. Оптимальная стратегия дается отображением

$$x \rightarrow (C(x), Y(x)) = \text{Arg max}_{(c, y) \in Q(x)} I(y),$$

где

$$Q(x) := \{(c, y) | U(c) \geq I(x), y \in \omega(x-c) \subset R_+^{2n}\}, \quad (46)$$

так как $Q(x)$ выпукло и функция I выпукла вверх, то при любом $x \in R_+^n$ множество $(C(x), Y(x)) \subset R_+^{2n}$ — выпуклый компакт. Положим

$$\sigma := \{x \in R_+^n | \exists e = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$$

и рассмотрим отображение $\tilde{Y}: \sigma \rightarrow \sigma$

$$\tilde{Y}(x) := \{\tilde{y} | \tilde{y} = y/e, y \in Y(x)\}, x \in \sigma,$$

при каждом $x \in \sigma$ $\tilde{Y}(x)$ — непустое выпуклое множество. По теореме Какутани отображение $\tilde{Y}$ имеет неподвижную точку $\hat{x} \in \sigma$. Это означает, что $\epsilon \hat{x} \in Y(\hat{x})$ при некотором $\epsilon > 0$. В силу равномерной сбалансированности $I(\hat{x}) = (1/\delta) I(\epsilon \hat{x})$, откуда $\epsilon = \delta$. Согласно (46), найдется $\hat{c}$ такое, что выполняются условия (25).

3. Доказательство леммы 1. Воспользуемся обозначением (27). Имеем

$$\begin{aligned} x \in D(S) &\Leftrightarrow S(x) \geq 1 \Leftrightarrow \{\exists x_1, x_2 \in R_+^n | \Phi_1(x_1) \geq 1, \\ &\Phi_2(x_2) \geq 1, x_1 + x_2 \leq x\} \Leftrightarrow \{\exists x_1 \in D(\Phi_1), x_2 \in D(\Phi_2) | \\ &x_1 + x_2 \leq x\} \Leftrightarrow \{\exists x_1 \in D(\Phi_1), x_2 \in D(\Phi_2) | x_1 + x_2 = x\}. \end{aligned}$$

Это означает, что множество $D(S)$ состоит из тех и только тех точек, которые могут быть представлены как сумма точек из $D(\Phi_1)$ и $D(\Phi_2)$ т.е. $D(S) = D(\Phi_1) + D(\Phi_2)$ (сумма Минковского). Отсюда получаем

$$S^*(p) = \min_{x \in D(S)} px = \min_{\substack{x_1 \in D(\Phi_1) \\ x_2 \in D(\Phi_2)}} p(x_1 + x_2) = \Phi_1^*(p) + \Phi_2^*(p), p \in R_+^n,$$

и (33) доказано. Равенство (34) следует из (33) как вариант общей теоремы Мо-ро — Рокафеллара, см. [7, § 0.3].

4. Доказательство леммы 2. Для любых x_i, p имеем из (26)

$$px_i \geq \Phi_i(x_i) \Phi_i^*(p) \quad i = 1, 2. \quad (47)$$

Складывая эти равенства для РС-дележа, удовлетворяющего равенствам (32), получим с учетом (33)

$$px \geq S(x) (\Phi_1^*(p) + \Phi_2^*(p)) = S(x) S^*(p) \quad \forall x, p. \quad (48)$$

По условию леммы $p \in N_x(S)$, поэтому в (48) имеет место равенство, но оно возможно только в том случае, если в (47) — также равенства, что и требуется.

5. Доказательство утверждения 3. Оно опирается на следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3. Пусть функция $\Phi \in \hat{W}$ и четверка векторов $p, z, q, y \in R_+^n$ связаны соотношениями

$$a) \quad q = \arg \max_{q' \in \omega^*(p)} \Phi^*(q') \quad б) \quad y = \arg \max_{y' \in \omega(z)} \Phi(y')$$

в) векторы z и p (ГФ)-взаимны

Тогда

1) $pz = qy$, 2) y и q Φ -взаимны.

Доказательство. Из а), б) следует $\Gamma^* \Phi^*(p) = \Phi^*(q)$, $\Gamma \Phi(z) = \Phi(y)$. Затем, в силу в), (38), (26), имеем

$$pz = (\Gamma \Phi)^*(p) \Gamma \Phi(z) = \Gamma^* \Phi^*(p) \Phi(y) = \Phi^*(q) \Phi(y) \leq qy. \quad (49)$$

Но согласно (37) $\{q \in \omega^*(p), y \in \omega(z)\} \Rightarrow qy \leq pz$. Эти два противоположных неравенства означают равенство 1). Поскольку при этом в правой части (49) тоже равенство, то в силу (31) справедливо 2). Лемма доказана.

Переходим к основной части. Достаточно доказать справедливость индуктивной импликации

$$\{(x_t, p_t) \text{ I-взаимны}\} \Rightarrow \{(c_t, p_t) \text{ U-взаимны};$$

$$(x_{t+1}, p_{t+1}) \text{ I-взаимны и выполнено равенство (41)}\}. \quad (50)$$

Начало индукции обеспечено условием (x_0, p_0) I-взаимности.

Итак, пусть (x_t, p_t) I-взаимны. Разбиение $x_t = c_t + z_t$, где $z_t := x_t - c_t$ образует РС-дележ для оператора (35), ибо $\{x_t, c_t\}$ — РС-траектория. Поэтому в силу леммы 2 c_t U-взаимно с p_t и z_t I-взаимно с p_t . Кроме того, по построению траекторий для четверки векторов $p = p_t, z = z_t, q = p_{t+1}, y = x_{t+1}$ и функции $\Phi = I$ выполнены все условия леммы 3, применяя которую, приходим к (50). Доказательство закончено.

* * *

Общую типологию моделей экономической динамики, частично изложенную во вводной части статьи, можно найти в [5, гл. VI]. К нашей постановке наиболее близка "полуоткрытая" модель, описанная в [4, § 14] со ссылками на ее первоисточники — работы Х. Азуми, Д. Гейла и Д. Цукуи; там же дан вывод теоремы о магистрали для этой модели.

Первый набросок предложенной здесь нормативной модели развития был сделан в [8, п. 14] (модель с равномерным потреблением). Гипотеза о магистрали (п. 2.3) сводится в силу (42a) к вопросу о сходимости траекторий (40). Аналогичный вопрос уже ставился автором в связи с моделью "промежуточной магистрали" [9, с. 43], но до сих пор он не получил ответа. В общей форме этот вопрос формулируется

следующим образом. Пусть задана гейловская технология ω и функция $\Phi \in \hat{W}$; спрашивается, при каких условиях (гипотеза: достаточно условий регулярности, упомянутых в доказательстве утверждения 1) траектории отображения

$$x \rightarrow \operatorname{Arg} \max_{y \in \omega(x)} \Phi(y)$$

сходятся (в угловом смысле)?

Сведения из теории сопряженных функций (разд. 3, п. 1) можно найти в [5, п. 2.3; 7, п. 4.1.1; 2, с. 23].

Замечание. При чтении корректуры статьи автор обнаружил, что используя неравенство (2.1) из [2], легко получить усиление утверждения 1, а именно, справедливо следующее.

Утверждение 4. Каждое из уравнений (8), (39) всегда имеет тривиальное решение ($\Phi \equiv 0$, $\Phi^* \equiv \infty$). В регулярной технологии ω нетривиальное решение существует только, если $\delta < \alpha$, при этом оно единственное.

А потому отпадает необходимость уточнения, сделанного в начале разд. 2, п. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
2. Бельский В.З. Стационарные модели экономической динамики. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1981.
3. Бельский В.З. Экономическая динамика: обобщающая "бюджетная" факторизация гейловской технологии // Экономика и мат. методы. 1990. Т. 26. Вып. 1.
4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
5. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
6. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. Л.: Наука, 1980.
7. Иoffee А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
8. Бельский В.З. Объективные функционалы в стационарных моделях экономической динамики // Математический аппарат экономического моделирования. М.: Наука, 1983.
9. Бельский В.З. Модель оптимального $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ перехода для пары гейловских технологий (промежуточная магистраль) // Вероятность и математическая экономика. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1988.

Поступила в редакцию
6 IX 1991