МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ НАСЕЛЕНИЯ*

© 1994 Гаврилец Ю.Н.

(Москва)

Анализируются равновесные по труду и потреблению состояния одно-продуктовой экономической модели без обмена и сравниваются процессы рыночного регулирования в условиях постоянных и переменных численностей социально-профессиональных групп. Доказывается существование зон устойчивости и неустойчивости равновесия в зависимости от величины общественного потребления и других факторов.

ВВЕДЕНИЕ

В макроэкономических моделях равновесного типа труд обычно рассматривается в одном ряду с товарами и ресурсами, и движение его определяется законами рынка, т.е. спросом и предложением. Измеряется, как правило, этот "товар" в количестве занятых в отраслях народного хозяйства. Такой подход, безусловно, правомочен, когда интенсивность труда фиксирована, например, четкими рамками 8-часового рабочего дня и неизменной индивидуальной производительностью. На "микроуровне" в зависимости от экономических, социальных и других условий субъект трудового поведения – работник – выбирает не только сферу приложения своего труда, но и его интенсивность, а тем самым производительность. Таким образом, фактически трудовое поведение характеризуется двумя независимыми наборами переменных: движения труда (межотраслевого, межпрофессионального, межрегионального и т.п.) и интенсивности труда.

Как правило, модели движения труда и модели непосредственной трудовой деятельности строятся автономно, тем самым игнорируется возможность взаимовлияния.

Цель данной статьи – рассмотрение обоих видов трудового поведения в рамках единой экономико-математической модели и установление на простейших примерах эффекта их взаимодействия.

1. СЛУЧАЙ НЕИЗМЕННОЙ ЧИСЛЕННОСТИ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП

Рассматривается экономическая система, в которой производится и потребляется один продукт. Население, участвующее в этих процессах, состоит из m социально-профессиональных групп по n_i членов, $i = 1, \dots, m$, характеризующихся одинаковыми для группы индивидуальной производительностью a_i , интенсивностью труда l_i и подушевым потреблением x_i . Кроме личного и промежуточного в системе есть фиксированное общественное потребление x^0 , так что объем продукции должен быть больше суммарного потребления групп. (Отрицательная величина x^0 означает наличие запаса, подлежащего распределению между группами в дополнение к выпускаемой продукции.)

Для всех членов каждой группы предполагается равной структура трудовых и

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект 93-06-10072.

потребительских предпочтений, описываемых функцией полезности индивида $u_i(l_i, x_i)$; $W(u_1, \dots, u_m)$ – функция общего благосостояния, выражающая принятую в моделируемой системе этику согласования интересов. Будем считать, что частные производные W по u_i и функции $u_i(l_i, x_i)$ по x_i положительны, $u_i(l_i, x_i)$ по l_i отрицательны. В этом случае множество возможных состояний экономической системы определяется индивидуальной трудовой активностью l_i и душевым потреблением группы x_i , удовлетворяющими естественным условиям

$$x_i, l_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\sum_i n_i(a_i l_i - x_i) \geq x^0. \quad (2)$$

Оптимальное, с точки зрения принятой этики согласования интересов, состояние системы максимизирует функцию благосостояния

$$W(u_1(l_1^*, x_1^*), \dots, u_m(l_m^*, x_m^*)) = \max W(u_1(l_1, x_1), \dots, u_m(l_m, x_m)). \quad (3)$$

Обозначив p^* оценку (2), выпишем условия Лагранжа

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = p^* n_i, \quad x_i^* > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial l_i} = -p^* a_i n_i, \quad l_i^* > 0, \quad (5)$$

которые, в частности, означают справедливость естественного соотношения, получаемого почленным делением (5) на (4)

$$E_i(l_i, x_i) = -\frac{\partial u_i}{\partial l} : \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

т.е. норма замещения труда потреблением ($E_i(l_i, x_i)$) равна объему производимого продукта при единичной интенсивности труда.

Конкретизируем вид функций модели. Пусть

$$W_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i, \quad (7)$$

$$u_i = \ln x_i + b_i \ln(T_i - l_i), \quad (8)$$

где λ_i – коэффициент соизмерения индивидуальных полезностей; $1/b_i$ – "коэффициент трудолюбия"; $T_i > 0$ – верхняя граница индивидуальной интенсивности труда [1, 2].

Будем предполагать, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^m a_i n_i T_i > x^0. \quad (8')$$

Соотношения Лагранжа (4), (5) принимают вид

$$\frac{\lambda_i}{x_i^*} = p^* n_i, \quad x_i^* > 0, \quad \frac{\lambda_i b_i}{T_i - l_i^*} p^* n_i a_i, \quad 0 < l_i < T_i, \quad (9)$$

откуда

$$n_i(a_i l_i^* - x_i^*) = n_i a_i T_i - \frac{\lambda_i b_i}{p^*} - \frac{\lambda_i}{p^*}. \quad (10)$$

Суммируя (10) по i и учитывая (2), выполняемое как равенство (в силу монотонности функций u_i), получаем

$$\sum_{i=1}^m n_i a_i T_i - \frac{1}{p^*} \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 + b_i) = x^0. \quad (11)$$

Отсюда

$$p^* = \frac{\sum_k \lambda_k (1 + b_k)}{\sum_k n_k a_k T_k - x^0}. \quad (12)$$

С помощью (12) из (9) имеем

$$x_i^* = \frac{\lambda_i \sum_k n_k a_k T_k - x^0}{n_i \sum_k \lambda_k (1 + b_k)}, \quad l_i^* = T_i - \frac{\lambda_i b_i \left(\sum_k a_k n_k T_k - x^0 \right)}{n_i a_i \sum_k \lambda_k (1 + b_k)}. \quad (13)$$

Таким образом, решение оптимизационной задачи дается в явном виде формулами (12), (13), если эти оптимальные значения удовлетворяют соответствующим строгим неравенствам. Но (13) означают, что $x_i^* > 0$, $l_i^* < T$, и при

$$\lambda_i b_i \left(\sum_k a_k T_k n_k - x^0 \right) < a_i T_i n_i \sum_k (1 + b_k) \lambda_k \forall i \quad (14)$$

оптимальные значения интенсивностей $l_i^* > 0$. Условие (14) накладывает ограничение на величину "нагрузки" x^0 , гарантирующее отсутствие "паразитирующих" групп.

Определим равновесие модели (1), (2) как такое состояние x_i^*, l_i^* и параметры $D_i^*, p^*, i = 1, \dots, m$, что выполняются соотношения

$$\sum_i n_i (a_i l_i^* - x_i^*) = x^0, \quad (15)$$

$$\sum_i n_i D_i = p^* x^0, \quad (16)$$

$$u_i(l_i^*, x_i^*) \geq u_i(l_i, x_i) \quad (17)$$

для l_i, x_i , удовлетворяющих

$$p^* x_i \leq p^* a_i l_i - D_i^*, \quad (18)$$

$$x_i \geq 0, \quad 0 \leq l_i \leq T_i. \quad (19)$$

Величина p^* имеет смысл цены единицы продукта, а D_i^* , (при $D_i > 0$) выполняет роль "индивидуальной нагрузки", т.е. душевого налога. Как обычно, равновесные значения обеспечивают выполнение натурального баланса (15), максимизацию индивидуальной функции полезности (17) при бюджетных ограничениях (18), а также денежное покрытие "общественного потребления" x^0 (16).

Нетрудно видеть, что оптимальные значения (13) образуют равновесие при цене p^* , определяемой формулой (12), и при трансферте-налоге D_i^* , обеспечивающей совпадение потребительского оптимума с глобальным. В нашем случае это означает, что

$$D_i^* = p^* a_i T_i - \frac{1 + b_i}{n_i} \lambda_i. \quad (20)$$

Более того, можно показать, что всякое равновесное состояние модели (1), (2), удовлетворяющее условиям (15)–(19), будет оптимальным по отношению к функционалу $\sum_i \lambda_i u_i(l_i, x_i)$ при соответствующих значениях λ_i .

2. МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Оптимальное или равновесное состояние экономической системы имеет реальный смысл в той степени, в какой оно может поддерживаться экономическими механизмами в условиях различных возмущений и изменений внешней среды. Такие механизмы обычно представляют собой правила поведения и взаимодействия частей системы между собой, с внешней средой и "центром", роль которого может играть рынок, где происходит сопоставление спроса и предложения. Математически эти механизмы обычно описываются на языке алгоритмов оптимизации или дифференциальных уравнений, решение которых представляет собой траекторию состояний экономики. Если траектории стремятся к положению равновесия (стационарному состоянию системы), то можно говорить, что процесс функционирования, как и равновесное (оптимальное) состояние, устойчив. Дальнейшая цель – качественный анализ механизмов поддержания равновесия типа (15)–(19) с точки зрения их устойчивости.

В общей схеме анализа экономической модели можно выделить несколько этапов.

I. Рассматривается оптимальное (с позиции принятой этики согласования интересов) состояние системы, т.е. объемы производимой и потребляемой продукции в группах, а также затраты труда членами каждой группы.

II. Исследуется равновесное состояние модели (если оно существует), для чего задаются соответствующие экономические параметры и правила поведения участников.

III. Анализируется связь между равновесными и оптимальными состояниями, т.е. выясняется, совпадают ли они.

IV. Задается механизм функционирования экономической системы, представляющий собой правила поведения всех участников. Обычно они определяются поведением участника в условиях экономического равновесия и механизмом изменения цен в зависимости от соотношения между совокупным спросом и предложением.

V. Исследуются качества стационарных траекторий, определяемых механизмом функционирования экономики и обычно совпадающих с равновесными состояниями. Эти траектории могут быть устойчивыми или неустойчивыми. В первом случае равновесие системы будет отражать некоторую существующую реальность, во втором оно несовместимо с данным экономическим механизмом.

Стандартная модель экономического механизма поддержания оптимального равновесия (15)–(19) может быть представлена в виде дифференциального уравнения

$$\dot{p} = \mu \left[x^0 - \sum_k n_k (a_k l_k(p) - x_k(p)) \right], \quad (21)$$

где μ – малый параметр; $l_k(p)$, $x_k(p)$ – реакция отдельного представителя группы i на цены $p(t)$ и трансферт $D_k(p) = p a_k T_k - (\lambda_k(1 + b_k)/n_k)$ в соответствии с моделью (17), (18).

Нетрудно вычислить $l_k(p)$ и $x_k(p)$

$$l_k(p) = T_k - \frac{1}{p} \frac{\lambda_k b_k}{a_k n_k}, \quad (22)$$

$$x_k(p) = \lambda_k / n_k p. \quad (23)$$

Подставляя эти выражения в (21), получим

$$\dot{p} = \mu \left[x^0 - \sum_k a_k n_k T_k + \frac{1}{p} \sum_k (1 + b_k) \lambda_k \right]. \quad (24)$$

Легко видеть, что стационарное значение цены p , получаемое из условия $\dot{p} = 0$, совпадает с равновесной ценой (12), а решение $p(t) = p^*$ устойчиво.

3. СЛУЧАЙ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ

Пусть теперь состояние модели определяется не только переменными интенсивностями труда, потребления, но и численностями групп n_i так, что к ограничениям (1), (2) добавляется равенство

$$\sum_i n_i = N \quad (25)$$

с требованиями

$$n_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (26)$$

В результате линейное неравенство (2) сразу переходит в нелинейное, и, что самое неприятное, оно задает невыпуклое множество переменных x_i, l_i, n_i .

Положим, нас интересуют такие численности групп n_i^0 и значение интенсивностей и потребления l_i^0, x_i^0 , которые максимизируют функцию общего благосостояния W (3) при ограничениях (1), (2), (25), (26). Теорема Куна – Таккера теперь к исследованию модели становится неприменимой. В предположении, что все переменные будут строго положительны, $l_i^0 < T_i$, можно лишь воспользоваться классическими множителями Лагранжа, поскольку баланс (2) должен выполняться как равенство (в силу ненасыщаемости функций $u_i(l_i, x_i)$, определенных в (8)). К необходимым условиям экстремума (4), (5) в этом случае добавятся

$$p^0(a_i l_i^0 - x_i^0) = q^0, \quad (27)$$

где q^0 – множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (25), а p^0 – ограничению (2).

Заметим, что в силу выпуклости (вверх) функции W условия (4), (5) по-прежнему означают оптимальность переменных l_i^0, x_i^0 при $n_i = n_i^0$, так как здесь балансовое соотношение (2) относительно переменных l_i, x_i остается линейным. Однако относительно n_i можно лишь утверждать, что $n_i = n_i^0$ – критические значения переменных, в которых функция Лагранжа может, например, иметь точку перегиба.

Для конкретного вида функции W и $u_i(l_i, x_i)$ были получены формулы (13), показывающие, как зависит оптимальное решение от численности групп n_i . Подставив эти выражения $x_i(n_1, \dots, n_m), l_i(n_1, \dots, n_m)$ в (7), (8), можно получить зависимость оптимального значения функции общего благосостояния от структуры населения

$$W^* = W^*(n_1, \dots, n_m), \quad (28)$$

после чего пытаться анализировать ее максимальное значение при (25), (26). К сожалению, функция (28) оказывается невыпуклой, так что на этом пути простого решения тоже не получается. Тем не менее необходимые условия (4), (5), (27) экстремума функции $W = \sum_i \lambda_i u_i(l_i, x_i)$ по переменным n_i, l_i, x_i легко позволяют определить соответствующую критическую точку.

В самом деле, для $p^0 \neq 0$ можно записать

$$a_i l_i^0 - x_i^0 = \frac{q^0}{p^0}, \quad (29)$$

после чего, подставив (29) в балансовое равенство (2), получим $\sum_i n_i \frac{q^0}{p^0} = x^0$, откуда

$$q^0 = (x^0/N)p^0. \quad (30)$$

Для определения l_i^0, x_i^0 имеем теперь два уравнения

$$E_i(l_i^0, x_i^0) = a_i, \quad a_i l_i^0 - x_i^0 = x^0/N. \quad (31)$$

Заметим, что уравнения (31) получены для произвольных выпуклых функций W и $u_i(l_i, x_i)$, так что экстремальные значения переменных l_i^0, x_i^0 не зависят от вида функции общего благосостояния, а целиком определяются только индивидуальными полезностями.

Для полезностей (8) имеем $b_i x_i^0 / (T_i - l_i^0) = a_i$, откуда $a_i l_i^0 = a_i T_i - b_i x_i^0$ и

$$l_i^0 = \frac{a_i T_i + b_i (x^0 / N)}{(1 + b_i) a_i}, \quad x_i^0 = \frac{a_i T_i - (x^0 / N)}{1 + b_i}. \quad (32)$$

Что касается значений n_i^0 , то согласно первому равенству (9), можно записать

$$n_i^0 = \frac{\lambda_i}{p^0 x_i^0} \text{ п } \sum_i n_i = N = \frac{1}{p^0} \sum_i \frac{\lambda_i (1 + b_i)}{a_i T_i - (x^0 / N)}, \quad (33)$$

откуда

$$p^0 = \sum_i \frac{\lambda_i (1 + b_i)}{a_i T_i N - x^0}. \quad (34)$$

Теперь значения n выписываются непосредственно

$$n_i^0 = \frac{N \lambda_i (1 + b_i)}{(a_i T_i N - x^0) \sum_k (\lambda_k (1 + b_k)) / (a_k T_k N - x^0)}. \quad (35)$$

Видно, что все найденные критические значения переменных строго положительны, а $l_i < T_i$. Будем называть их квазиоптимальными.

4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ НАСЕЛЕНИЯ

Как отмечалось, квазиоптимальные значения x_i^0, l_i^0 оптимальны при $n_i = n_i^0$. Формула (20) дает значение i -го трансферта, обеспечивающего совпадение равновесия с оптимумом. Подставив в нее вместо p^* величину p^0 из (34) и n_i^0 из (35), получим

$$D_i^0 = q^0. \quad (36)$$

Таким образом, квазиоптимальные значения l_i^0, x_i^0 будут определять равновесие модели при $n_i = n_i^0$.

Индивидуальные функции полезности достигают максимума при бюджетном ограничении с $D_i = q^0$

$$\begin{aligned} u_i(l_i, x_i) &= \max, \\ p_i^0 x_i &\leq p^0 a_i l_i - q^0, \\ x_i, l_i &\geq 0, \quad l_i \leq T_i. \end{aligned} \quad (37)$$

Денежный баланс выполняется автоматически

$$\sum_i n_i q^0 = N q^0 = p^0 x^0.$$

Перейдем теперь к процессу поддержания данного равновесия с помощью механизма корректировки оценок. Первая оценка имеет, как и прежде, смысл цены продукта, а вторая относится к балансу численностей групп. Поскольку равновесие характеризуется равными для всех групп трансфертами, которые совпадают с двойственной оценкой баланса групповых численностей, будем рассматривать такой механизм функционирования, в котором эти свойства равновесия переносятся и на текущие значения параметров. Уравнение динамики цены p продукта имеет прежний вид,

уравнение оценки q группового баланса – аналогичное

$$\dot{p} = \mu \left(x^0 - \sum_k n_k(p, q) [a_k l_k(p, q) - x_k(p, q)] \right), \quad (38)$$

$$\dot{q} = \nu \left(N - \sum_n n_k(p, q) \right).$$

При текущих значениях величин p и q каждый представитель группы k решает задачу

$$\begin{aligned} u_k(l_k, x_k) &\rightarrow \max, \\ px_k &< pa_k l_k - q, \\ x_k, l_k &\geq 0, \quad l_k < T, \end{aligned}$$

в результате чего определяются значения переменных $x_i(p, q)$, $l_i(p, q)$. В нашем случае их выражение имеет вид

$$l_k(p, q) = \frac{a_k T_k + b_k(q/p)}{a_k(1+b_k)}, \quad x_k(p, q) = \frac{a_k T_k - q/p}{1+b_k}. \quad (39)$$

Данные соотношения показывают, как реагируют группы в модели на изменения "цен" p и "налога" q . С ростом p происходит одновременное увеличение "оплаты" труда $pa_k l_k$ ("индексация зарплаты"), поэтому при фиксированном душевом "налоге" q потребление x_k растет, а интенсивность труда l_k уменьшается. Такой характер поведения обусловлен видом целевых функций потребителя и принятыми предположениями модели.

Предположим, что в текущий момент времени t сумма величин n_k не обязана совпадать с N , смысл которой – необходимое количество "членов общества", а $\sum_k n_k$ –

число "желающих" быть таковыми.

Поведение участников при формировании численности групп будем описывать неявно, так что за единичный промежуток времени из каждой группы уходит νn_k членов, а приходит тем больше, чем больше предельная полезность ее дохода. Другими словами, прирост регулируется размером дохода. Чем больше доход, тем меньше его предельная полезность, тем сложнее туда попасть "со стороны", тем меньше прирост. Коэффициент пропорциональности прироста величине предельной полезности задается извне, со стороны общества и определяется "общественной значимостью" этой группы.

В результате получим

$$n_k^{t+1} = (1 - \nu)n_k^t + \nu c_k \beta_k(p, q), \quad (40)$$

где $\beta_k(p, q)$ – предельная полезность дохода групп k ; c_k – коэффициент пропорциональности прироста численности группы величине предельной полезности дохода; ν – малый параметр.

Переходя к непрерывному времени, вместо разностного уравнения (40) получим дифференциальное

$$\dot{n}_k = \nu [c_k \beta_k(p, q) - n_k]. \quad (41)$$

Поскольку равновесные значения x_k^0, l_k^0 оптимальны по отношению к численностям n_k , относительно которых выполняются равенства (33), где $\beta_k = \frac{1}{pl_k}$ – предельная полезность дохода в (37) (с функциями полезности (8)), естественно полагать, что коэффициент c_k совпадает с λ_k . В этом случае стационарные значения n_k определяют

равновесные значения l_k, x_k . Конкретно (41) принимает вид

$$\dot{n}_k = v \left[\frac{\lambda_k}{px_k(p, q)} - n_k \right]. \quad (42)$$

Уравнение (41) означает, что при неизменном $c_k \beta_k$ размер группы $n_k(t)$ экспоненциально (с показателем v) стремится к $c_k \beta_k$. Поскольку мы исследуем локальную устойчивость, будем сразу считать

$$n_k(t) = \lambda_k / px_k(p, q), \quad (43)$$

что правдоподобно, когда оценки меняются медленнее, чем численности групп.

Подставляя в (43) вместо $x_k(p, q)$ его выражение (39), получим

$$n_k(p, q) = \frac{\lambda_k(1+b_k)}{a_k T_k p - q}. \quad (44)$$

Подставляя далее в (38) вместо x_k, l_k и n_k их выражения (39), (44), имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \mu \left[x^0 - \frac{q}{p} f(p, q) \right] \equiv P(p, q), \\ \dot{q} &= v[N - f(p, q)] \equiv Q(p, q), \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$f(p, q) = \sum_k \frac{\lambda_k(1+b_k)}{a_k T_k p - q}, \quad (46)$$

а размерные величины $\mu, v > 0$ характеризуют скорость реагирования цен на изменения балансов (2), (25). Именно эта система описывает динамику регулирующих параметров p и q , а через них и поведение всех участников групп. Наша цель — исследовать качественный характер этой динамики.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИКИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ НАСЕЛЕНИЯ

Стационарное решение $p(t) = \hat{p}, q(t) = \hat{q}$ системы (45), (46) является решением (причем единственным) алгебраической системы

$$P(p, q) = 0, \quad (47)$$

$$Q(p, q) = 0.$$

Нетрудно видеть, что $x^0/N = \hat{q}/\hat{p}$, и после подстановки в (46) вместо $\hat{q}$ его выражения через $\hat{p}$ получаем

$$f(\hat{p}, \hat{q}) = N = \sum_k \lambda_k(1+b_k) / a_k T_k \hat{p} - \hat{q} = N \frac{1}{\hat{p}} \sum_k \frac{\lambda_k(1+b_k)}{a_k T_k N - x^0}$$

или

$$\hat{p} = \sum_k \frac{\lambda_k(1+b_k)}{a_k T_k N - x^0}, \quad (48)$$

что соответствует равновесному значению цены (34). Выпишем также стационарное значение $\hat{q}$

$$\hat{q} = \frac{x^0}{N} \sum_k \frac{\lambda_k(1+b_k)}{a_k T_k N - x^0}, \quad (49)$$

которое вместе с $\hat{p}$ полностью определяют квазиоптимальное равновесие.

Из теории устойчивости автономных систем [3] типа (45) известно, что стационарное решение будет устойчивым, только если оба корня характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} - \lambda & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (50)$$

имеют отрицательные действительные части. Все производные здесь берутся в критической точке.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть для всех $k = 1, \dots, t$ произведения $a_k T_k N > x^0$. Тогда стационарное решение системы (45), (46) будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от величины дроби v/μ . При выполнении условия $a_k^2 T_k^2 \leq v/\mu \forall k$ стационарное решение устойчиво, при выполнении неравенства $a_k^2 T_k^2 > v/\mu \forall k$ — решение будет устойчивым, если $x^0 < x_{\min}^0 \equiv N \min_k \left(a_k T_k - \sqrt{a_k^2 T_k^2 - \frac{v}{\mu}} \right)$ и неустойчивым при $x^0 > x_{\max}^0 \equiv N \max_k \left(a_k T_k + \sqrt{a_k^2 T_k^2 - \frac{v}{\mu}} \right)$. В этом случае при $x_{\min}^0 < x^0 < x_{\max}^0$ найдется хотя бы одна точка бифуркации, в которой меняется характер стационарного решения.

При положительности разностей $a_k^2 T_k^2 - v/\mu$ для одних групп k и отрицательности их для других необходим дополнительный анализ.

Доказательство. В соответствии со сказанным необходимо исследовать зависимость корней (50) от величины "общественного потребления" или "нагрузки" x^0 .

Рассчитаем коэффициент

$$a_1 = -\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{v\hat{p}^2 \hat{f}_q - \mu \hat{p} \hat{q} \hat{f}_p - \hat{q} N \mu}{\hat{p}^2}, \quad (51)$$

где $\hat{f}_p, \hat{f}_q$ — частные производные функции $f(p, q)$ в точке $\hat{p}, \hat{q}$, имеющие вид

$$\hat{f}_p = -\frac{N^2}{\hat{p}^2} \sum_k \frac{\lambda_k (1+b_k)}{(a_k T_k N - x^0)^2}, \quad \hat{f}_q = -\frac{N^2}{\hat{p}^2} \sum_k \frac{\lambda_k (1+b_k)}{(a_k T_k N - x^0)^2}. \quad (52)$$

Коэффициент

$$a_2 = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-\hat{q} \hat{f}_q - \hat{q} \hat{f}_p}{\hat{p}^2} N \mu v. \quad (53)$$

Подставив в (51) и (53) вместо производных $\hat{f}_p, \hat{f}_q$ и значений $\hat{p}, \hat{q}$ их выражения из (52) и (48), (49) и произведя необходимые упрощения, получим

$$a_1(x^0) = \frac{1}{\hat{p}^2} \sum_k \frac{\lambda_k (1+b_k)}{(a_k T_k N - x^0)^2} A_k(x^0),$$

$$a_2(x^0) = \frac{N^2}{\hat{p}^2} \mu v, \quad (54)$$

где

$$A_k(x^0) = x^{02} \mu - 2a_k T_k N \mu x^0 v + N^2 v. \quad (55)$$

Очевидно, действительная часть корней уравнения (50) будет отрицательной, если $a_1(x^0), a_2(x^0) > 0$. Коэффициент $a_2(x^0)$ всегда положителен. Знак коэффициента $a_1(x^0)$ зависит от значений $A_k(x^0)$. Так как множители перед $A_k(x^0)$ в сумме (54) положительны, то стационарное решение будет устойчивым, если при данном x^0 все $A_k(x^0)$ положительны. Поскольку при заданных значениях a_k, T_k, N зависимость (55) является параболой, при $a_k^2 T_k^2 < v/\mu \forall k$ все величины $A_k(x^0) > 0$, что обеспечивает устойчивость решения.

Если $a_k^2 T_k^2 > v/\mu \forall k$, то при

$$x_0 < x_{k1} = N(a_k T_k - \sqrt{a_k^2 T_k^2 - v/\mu})$$

величина $A_k x^0$ положительна, а при $x^0 > x_{k1}$ отрицательна. Поскольку для любого числа $y > a$ разность $y - \sqrt{y^2 - a} > 0$, можно заключить, что $x_{\min}^0 = \min_k N\left(a_k T_k - \sqrt{a_k^2 T_k^2 - \frac{v}{\mu}}\right) > 0$ и при $x^0 > x_{\min}^0$ все $A_i(x^0) > 0$. Это означает положительность коэффициента a_1 и устойчивость соответствующих данному x^0 стационарных решений.

Убедимся, что существуют такие $x^0 < N a_k T_k \forall k$, что $A_k(x^0) < 0$. Это свидетельствует об отрицательности a_1 и неустойчивости стационарных решений. Очевидно, для этого надо показать, что найдутся значения x^0 , такие что

$$N \max_k \left(a_k T_k - \sqrt{a_k^2 T_k^2 - \frac{v}{\mu}} \right) < x^0 < N \min_k a_k T_k. \quad (56)$$

Рассмотрим две зависимости $y_1 = x$ и $y_2 = x - \sqrt{x^2 - \frac{v}{\mu}}$.

Очевидно, при $x \geq v/\mu$ $\min y_1(x) > \frac{v}{\mu}$, а $\max y_2(x) < v/\mu$, откуда $\max y_2(x) < \min y_1(x)$, что означает справедливость соотношения (56). Значит, существует множество значений x , для которых стационарные решения неустойчивы. Именно так обстоит дело при $x^0 > x_{\max}^0$.

В силу непрерывности функции $a_1(x^0)$ из доказанного вытекает, что между $x_{\min}^0$ и $x_{\max}^0$ найдется хотя бы одна точка, где $a_1(x^0) = 0$. Она и есть точка бифуркации.

Доказанная теорема имеет вполне ясный содержательный смысл. Она указывает, что устойчивость рыночного равновесия определяется, в частности, скоростями реакции цен на дисбалансы. Если цена продукта слишком сильно реагирует на разницу между спросом и предложением, то равновесие может стать неустойчивым. Этот эффект компенсируется скоростью изменения налога v .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные две модификации однопродуктовой модели без обмена, по-видимому, не могут быть более упрощены. Тем не менее анализ основной модели с переменной структурой населения полностью провести пока не удастся. Это обусловлено снятием требования фиксированной численности групп, что приводит к нарушению основного свойства моделей математической экономики – выпуклости допустимых множеств изучаемых переменных.

Для анализа состояний экономики с переменной структурой населения с помощью

функции общего благосостояния, соизмеряющей труд и потребление отдельных индивидов, необходимо уточнение, которое не было сделано. Дело в том, что если нет специального запрета на равенство $n_i = 0$, то допускается возможность достаточно произвольных значений l_i, x_i , не влияющих на выполнение балансового ограничения, но оказывающих воздействие на функцию благосостояния. Критические точки функции Лагранжа, с помощью которых было сконструировано равновесие, оказались "хорошими", удовлетворяющими строгим неравенствам. Однако для более полного анализа необходимо явно формулировать все требования; в частности, от конечного количества групп численностей в n_i , по-видимому, удобнее перейти к плотностям распределения на отрезке.

Несмотря на то что построенное и изучаемое равновесие оказывается только квазиоптимальным и не является оптимальным по всей совокупности переменных n_i, l_i, x_i , само по себе оно — вполне обычный пример экономической системы. Это равновесие отражает реальную ситуацию, когда движение труда и населения могут существенно корректировать свойства равновесия и его регулирования.

Хотя исследование проводилось в предположении определенного вида функций полезности, представляется, что качественные выводы об устойчивости и неустойчивости соответствующих процессов регулирования цен могут оставаться справедливыми и для других типов предпочтений. Впрочем, мы полагаем, что из сепарабельных функций полезности трудового и потребительского поведения использованные здесь функции отражают реальные предпочтения с наименьшими искажениями.

Главный результат включения в обычную модель процесса корректировки динамики численностей групп — обнаружение зон устойчивости и неустойчивости равновесия в зависимости от величины внешней нагрузки на экономику. При постоянных численностях процесс устойчив независимо от нагрузки, при изменяющихся численностях всегда существуют имеющие смысл ее величины, при которых рынок не справляется с поддержанием экономического равновесия. При этом данное свойство имеет системный характер, так как определяется всеми факторами, задающими процесс функционирования: механизмом спроса-предложения, формированием численностей групп под воздействием возможного уровня потребления, другими реакциями населения на цены и налоги. Существенно, что по-разному ведут себя группы при постоянной и переменной структуре населения. В первом случае рост цены увеличивает интенсивность труда и уменьшает потребление, так как трансферт линейно возрастает: во втором изменении величины трансферта (налога) и цены происходят, вообще говоря, независимо, в результате чего и потребления и интенсивности могут возрастать или убывать в зависимости от соотношений между изменениями p и q . По этой причине при больших x^0 может возникнуть положительная обратная связь, приводящая к неустойчивости.

Важно здесь предположение о меньшей скорости динамики цен по сравнению со скоростью изменения структуры населения. Совершенно очевидно, что далеко не всегда эта гипотеза оправдана; отказ от нее приводит к формальному усложнению процедуры математического анализа системы дифференциальных уравнений. Однако пока не ясно, изменятся ли в этом случае свойства равновесия.

Заметим, что принятый нами вид линейной зависимости численностей групп от предельной полезности доходов дает дополнительную информацию о смысле "коэффициентов социальной значимости" λ_i . Именно λ -коэффициенты как параметры внешнего управления определяют размер группы в дополнение к величине предельной полезности, а значит, и дохода, которые также указывают экономически целесообразные размеры группы.

Наконец, наметим направления дальнейших исследований затронутой проблемы. В теоретико-модельном плане предполагается провести анализ по крайней мере двухпродуктовой модели, позволяющий включить в рассмотрение обмен и наличие начальных запасов в явной форме. Кроме того, будут изучаться функции общего

благополучия в форме максимизации минимума из потребления групп (критерий Роулза) [4], а также проводится компьютерный анализ неустойчивых траекторий, оптимальных состояний и важности тех или иных параметров модели.

Автор выражает признательность В.З. Беленькому за ряд замечаний, позволивших уточнить формулировку и результаты исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаврилец Ю.Н.* Целевые функции социально-экономического планирования. М.: Экономика, 1983.
2. *Гаврилец Ю.Н.* Об использовании функций полезности в экономическом анализе // Экономика и мат. методы. 1988. Т. 24. Вып. 5.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
4. *Menahem E.Y.* Rawls, Edgeworth, Shapley, Nash Theories of Distributive Justice Re-examined // J. Econ. Theory. 1981. V. 24. № 1.

Поступила в редакцию
29 X 1993