ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1994
Том 30, вып. 2

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА БЕНДЕРСА ЧАСТИЧНО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

© 1994 **Лебедев С.С.**

(Москва)

Последовательность (почти полностью) целочисленных задач, возникающих в декомпозиционной схеме Бендерса, предлагается решать методом упорядочивающей индексации (упорядоченного перебора). Это позволяет использовать более сильные оценки – лагранжевой релаксации и расслоения переменных. Развивается математический аппарат, необходимый для реализации такого подхода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Большое число прикладных задач оптимального планирования сводится к моделям частично целочисленного линейного программирования (ЧЦЛП), в которых на часть переменных накладывается требование целочисленности, а остальные должны быть неотрицательными. Основным инструментом для решения задач ЧЦЛП является метод ветвей и границ. Он основан на переборе вариантов, образуемых при фиксации части целочисленных переменных (или разбиении множества их допустимых значений на непересекающиеся подмножества) с отсевом неперспективных вариантов с помощью вычисления соответствующих им оценок оптимального значения целевой функции. Для вычисления оценки варианта используется так называемая *релаксированная задача,* получаемая из исходной задачи ЧЦЛП при фиксированных значениях некоторых переменных отбрасыванием требований целочисленности незафиксированных переменных. Эта задача линейного программирования (ЛП) решается в каждом узле дерева вариантов, обходом ветвей которого осуществляется их перебор. При переходе из узла в смежный вдоль некоторой ветви дерева вариантов оптимальное решение новой релаксированной задачи вычисляется достаточно экономным образом с использованием оптимального решения релаксированной задачи исходного узла. Именно экономный пересчет оценки определил успехи применения метода ветвей и границ. Однако его возможности ограничены: при целочисленных (булевых) переменных порядка 150–200 происходит резкое увеличение числа перебираемых вариантов.

Будем называть оценку, получаемую из решения релаксированной задачи ЛП, *непрерывной.* В целочисленных линейных задачах, где все переменные целочисленны (их, а также задачи, где помимо целочисленных переменных имеется одна непрерывная, будем называть задачами ЦЛП), применяются более сильные оценки, чем непрерывные. Для их использования в ЧЦЛП необходимо предварительно осуществить декомпозицию, выделив задачу ЦЛП. Именно такой декомпозиционной схемой для задач ЧЦЛП является метод Бендерса [1, 2, п. 15.2].

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-499).

Здесь рассматривается его модификация. Она заключается в том, что получающаяся при декомпозиции задачи ЧЦЛП последовательность (почти) полностью целочисленных задач будет решаться методом *упорядочивающей индексации* (УИ) [3, 4]*, а не традиционно использовавшимся методом ветвей и границ. Это позволяет применять при решении целочисленных подзадач сильные оценки *лагранжевой релаксации* [5, 6] и *расслоения,* получаемые с помощью стратегии расслоения переменных [7, 8] (см. 4.1).

Метод УИ заключается в переборе допустимых решений некоторой *оценочной задачи* (см. 3.1) в порядке возрастания (в задаче на минимум) значений ее целевой функции; при выполнении критерия оптимальности перебор оканчивается и из построенных вариантов выделяется оптимальное решение исходной задачи (см. 3.2). В основе метода УИ лежит *базовый алгоритм* УИ (см. 3.3), который дает возможность построить все допустимые решения задачи о рюкзаке (задаче ЦЛП с одним ограничением) с фиксированным значением целевой функции. Перебирая эти значения в порядке возрастания, можно генерировать упорядоченную последовательность вариантов.

Алгоритм УИ является обобщением алгоритма динамического программирования для задачи о рюкзаке. На его первом этапе по рекуррентным формулам строится *таблица УИ,* с помощью которой на втором этапе генерируется требуемая последовательность вариантов. В общей задаче ЦЛП таблицы УИ строятся независимо для всех (или части) ограничений. Их взаимная корректировка, исключающая из перебора те варианты, которые недопустимы хотя бы по одному ограничению, в ряде случаев позволяет существенно сократить перебор в методе УИ. Однако при применявшемся ранее алгоритме корректировки таблиц [3, 4] это сокращение оказывалось тем меньшим, чем больше был разброс коэффициентов в столбцах матрицы ограничений задачи ЦЛП. В связи с этим применение такого алгоритма корректировки в целочисленных подзадачах метода Бендерса представляется неперспективным. Полученная новая оценка расслоения (см. 4.2) мало чувствительна к разбросу коэффициентов решаемой задачи ЦЛП, а возможность быстрого вычисления ее приближенного значения дает основания надеяться на ее успешное применение при корректировке таблиц УИ в подзадачах метода Бендерса.

Еще один путь для сокращения перебора в методе УИ, равно реализуемый как при применении оценки расслоения, так и оценки лагранжевой релаксации, связан с тем, что после получения одной из этих оценок можно не строить по алгоритму УИ те варианты, для которых значения целевой функции не превосходят рассчитанной оценки (см. 4.3.4).

Наконец, обе упомянутые оценки позволяют эффективно использовать неточность задаваемой информации и сокращать перебор в результате перехода к поиску *квазиоптимальных решений* [9, 10], т.е. оптимальных решений задач, коэффициенты которых достаточно близки к исходным.

Схема Бендерса является реализацией метода секущих плоскостей [11], имеющего крайне медленную сходимость. В связи с этим были разработаны специальные алгоритмы, в которых строятся ограничения, призванные стать начальными для метода Бендерса. Построение каждого очередного начального ограничения приводит к максимально возможному увеличению оценки. Их построение, реализуемое с помощью решения обобщенных задач ЛП, столбцы которых генерируются по алгоритму УИ, продолжается до тех пор, пока увеличивается оценка (см. разд. 5).

Достаточно разнородное содержание статьи объясняется самой структурой предлагаемой модификации метода Бендерса, в которой соединены различные подходы. Каждому из них посвящен отдельный раздел. В разд. 2 излагается метод Бендерса; в разд. 3 описывается новый алгоритм УИ, необходимость разработки кото-

* В [3, 4] УИ называется методом упорядоченного перебора. Используемое здесь предложенное рецензентом название более точно отвечает существу вопроса.

рого вызвана присутствием в задачах ЦЛП, возникающих в схеме Бендерса, одной непрерывной переменной. Оценкам расслоения посвящен разд. 4, а построению начальных ограничений – разд. 5. Чтобы можно было читать приводимый материал без обращения к первоисточникам, там, где это требуется, дается краткий, но достаточно полный обзор. Такой характер носят разделы и подразделы 2, 3.1–3.3, 4.1. При описании отдельных подходов уделяется особое внимание их использованию в декомпозиционной схеме Бендерса.

Статью следует рассматривать только как итог предварительных исследований в области модификации метода Бендерса. Основная работа должна быть связана с программной реализацией намеченного подхода и проведением сравнительного вычислительного эксперимента.

2. ДЕКОМПОЗИЦИОННАЯ СХЕМА БЕНДЕРСА

Рассмотрим задачу ЧЦЛП

$$cx + ry \to \min =: \sigma, \quad Ax + By \geqslant b, \quad x \in X, \quad y \geqslant 0, \tag{1}$$

где $c \in Z_+^n$, $r \in R_+^p$, $A \in R_+^{m\times n}$, $B \in R^{m\times p}$, $b \in R_+^m$, а в определение области X входят требования неотрицательности и целочисленности переменных x_j, $j \in J := \{1,..., n\}$ и, возможно, ряд других ограничений на $x \in Z_+^n$. Не уменьшая общности, можно предположить, что множество $U = \{u \in R^m | uB \leqslant r, u \geqslant 0\}$ ограничено, так что задача ЛП, получающаяся при переходе от (1) с фиксированным значением вектора $x \in X$ к двойственной задаче, имеет конечное значение. (Если U не ограничено, вводится дополнительное ограничение $\Sigma\, u_i \leqslant M$, где M – достаточно большое положительное число.)

Пусть $\{u^t, t \in T\}$ – множество вершин многогранника U. Для произвольного $x \in R_+^n$ положим

$$V(x) := \max_{u \in U} u(b - Ax) = \max_{t \in T} u^t(b - Ax),$$

$$\psi(x) := cx + V(x).$$

Функции $V(x)$, $\psi(x)$ – выпуклые, кусочно-линейные на R_+^n. Поскольку $r \geqslant 0$, то функция V неотрицательна на всем R_+^n. По теореме двойственности ЛП задача (1) эквивалентна минимизации функции ψ на множестве $X \subset R_+^n$, т.е. $\sigma = \min\limits_{x \in X} \psi(x)$.

В схеме Бендерса [3] задача минимизации ψ на X реализуется по методу секущей плоскости [11]. Неотрицательная функция $V(x)$ аппроксимируется кусочно-линейными функциями

$$V_k(x) := \max_{t \in T_k} [u^t(b - Ax)]^+, \quad x \in R_+^n,$$

где $v^+ := \max\,\{v, 0\}$ и T_k, $k = 1,...,$ – некоторая расширяющаяся последовательность подмножеств множества T. Соответственно, $\psi_k(x) := cx + V_k(x)$ – последовательность монотонно возрастающих функций, каждая из которых является оценкой снизу для ψ: $\psi_k(x) \leqslant \psi\,(x)$, $x \in R_+^n$, причем если $T_k = T$, то $\psi_k = \psi$. Таким образом, $\sigma_k := \min\limits_{x \in X} \psi_k(x) \leqslant \sigma$.

Запишем задачу минимизации ψ_k на X в виде

$$cx + \nu \to \min =: \sigma_k, \quad (u^t A)x + \nu \geqslant u^t b, \quad t \in T_k, \quad x \in X, \quad \nu \geqslant 0. \tag{2}$$

Через (2′) обозначим аналогичную задачу, в которой множество T_k заменено на T, т.е. задачу минимизации $\psi(x)$ на X, эквивалентную исходной – (1).

В (2) все переменные, кроме одной (ν), целочисленны. Пусть (x^k, ν^k) – ее оптимальное решение; $\nu^k = V_k(x^k)$. Положим

$$t_{k+1} := \arg\max_{t \in T} u^t (b - Ax^k). \tag{3}$$

Тогда $u^{t_{k+1}}(b - Ax^k) = V(x^k)$. Поэтому, если $\nu^k \geqslant V(x^k)$, то $\sigma_k = \psi_k(x^k) \geqslant \psi(x^k) \geqslant \sigma$, а так как $\sigma_k \leqslant \sigma$, то $\sigma = \sigma_k$ и x^k – точка минимума ψ на X. В противном случае $\nu^k < u^{t_{k+1}}(b - Ax^k) = V(x^k)$. Это означает, что (x^k, ν^k) не удовлетворяет неравенству

$$(u^{t_{k+1}} A)x + \nu \geqslant u^{t_{k+1}} b. \tag{4}$$

Положив $T_{k+1} := T_k U \{t_{k+1}\}$, заключаем, что точка (x^k, ν^k) недопустима для задачи (2) при $k := k + 1$, т.е. отсекается неравенством (4).

Ограничения вида (4) принято называть *отсечениями Бендерса*; вектора u^t, $t \in T_{k+1}$, с помощью которых они строятся, будем называть *образующими*.

Замечание 1. Если в (4) в качестве образующего взять вектор $u \in U$, не являющийся вершиной многогранника U, получится обобщенное отсечений Бендерса, представимое в виде выпуклой линейной комбинации отсечений Бендерса. Обобщенные отсечения строятся в разд. 5 специальным методом, для того чтобы до начала реализации процедуры Бендерса, во-первых, получить достаточно хорошую оценку значения σ и, во-вторых, построить начальные ограничения для реализации метода УИ и задать множество T_0 для метода Бендерса. Если не использовать процедуры разд. 5, то можно положить $T_0 = \phi$ и $(x^0, \nu^0) = 0$.

Замечание 2. Задача (2) является оценочной для (2′) (см. 3.1); включение условия $\nu \geqslant 0$ усиливает оценку, существенно облегчая решение задачи (2) методом УИ (см. 3.3; 3.5).

На произвольной (k-й, $k = 1,\ldots$) итерации метода Бендерса решается задача ЦЛП (2). По ее оптимальному решению (x^k, ν^k) определяется, в соответствии с (3), вектор $u^{t_{k+1}}$; для этого решается задача ЛП, получаемая из (1) фиксацией $x := x^k$. Находятся ее оптимальное решение y^k и вектор $u^{t_{k+1}}$ разрешающих множителей. Если $\nu^k \geqslant V(x^k)$, то (x^k, y^k) – оптимальное решение задачи (1). В противном случае полагается $T_{k+1} := T_k U \{t_{k+1}\}$, вводится отсечение (4) и формируется новая задача ЦЛП (2) при $k := k + 1$.

Конечность метода Бендерса следует из конечности вершин многогранника U. Однако из-за медленной сходимости метода секущей плоскости число итераций метода Бендерса достаточно велико и, по-видимому, его можно существенно уменьшить, формально используя схему метода уровней [12], являющегося модификацией метода секущей плоскости с числом итераций, практически совпадающим с информационной сложностью задач минимизации негладких выпуклых функций [13]. Конечно, оценка числа итераций из [12] здесь, при оптимизации функции по $x \in Z^n$, неверна.

3. ОЦЕНОЧНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОД УПОРЯДОЧИВАЮЩЕЙ ИНДЕКСАЦИИ

Метод УИ заключается в генерации допустимых решений некоторой целочисленной оценочной задачи в порядке увеличения (в задаче на минимум) значений ее целевой функции, в процессе которой оптимальное решение исходной задачи находится среди построенных решений в результате проверки некоторого текста на оптимальность.

3.1. Оценочная задача. Определение 1. Задача

$$F(x) \to \min_{x \in P} =: z_0 \tag{5}$$

называется *оценочной* по отношению к исходной

$$f(x) \to \min_{x \in S} =: \bar{z}, \tag{6}$$

если: а) $P \supseteq S$ и б) $F(x) \leqslant f(x)$ $\forall x \in S$.

Приведем несколько примеров оценочных задач для общей задачи ЦЛП. При отбрасывании требования целочисленности переменных получается релаксированная задача ($P \supseteq S$, $F \equiv f$); ее оптимальное значение ($z_{\text{н}}$) принято называть *непрерывной оценкой.*

Заменив исходные ограничения (неравенства) задачи ЦЛП их суммой с (неотрицательными) коэффициентами (λ_i), получим так называемое *заменяющее ограничение* и оценочную целочисленную задачу ($P \supseteq S$, $F \equiv f$) с одним ограничением – *задачу о рюкзаке.*

Разобьем систему ограничений задачи ЦЛП на две подсистемы (в задаче общего вида обычно в качестве первой берется заменяющее ограничение, а все исходные включаются во вторую), введем ограничения второй подсистемы в функцию Лагранжа $L(x, u)$ с множителями u_i и рассмотрим задачу минимизации $L(x, u)$ при произвольной u ($u_i \geqslant 0$ – для ограничений-неравенств) по $x \in X$, удовлетворяющим ограничениям первой подсистемы. Эта оценочная задача ($P \supseteq S$, $F(x) \leqslant f(x)$ для $x \in S$) определяет так называемую оценку лагранжевой релаксации $z_{\text{л}}(u)$ (см. [6]).

3.2. Общая схема метода УИ. Пусть $\{x^t, t = 1,\ldots\}$ – последовательность в с е х допустимых решений оценочной задачи (5) (называемых далее вариантами), упорядоченных (перенумерованных) по возрастанию значений $F(x^t)$. Пусть построены первые k вариантов $x^1,\ldots, x^k$. Является ли один из них оптимальным решением исходной задачи, и если да, то как его найти? Для этого используются следующие простые правила.

А. **Случай** $F \equiv f$. Если $x^1,\ldots, x^{k-1} \notin S$, а $x^k \in S$, то x^k – оптимальное решение задачи (6).

Б. **Случай** $F(x) \leqslant f(x)$, $x \in S$; $F \not\equiv f$. Для произвольного k определяются *рекорд* $f^{(k)}_{\text{рек}} := \min\{f(x^t) | x^t \in S,\ 1 \leqslant t \leqslant k\}$ и *кандидат* в оптимальные решения $x^s \in \operatorname{Arg} \min\{f(x^t) | x^t \in S,\ 1 \leqslant t \leqslant k\}$, $f(x^s) = f^{(k)}_{\text{рек}}$. Если $F(x^k) \geqslant f^{(k)}_{\text{рек}}$, то x^s является оптимальным решением задачи (6) (действительно, $f(x^s) = f^{(k)}_{\text{рек}} \leqslant F(x^t) \leqslant f(x^t)$ для $x^t \in S$, $t > k$ и $f(x^s) \leqslant f(x^t)$, $t < k$, $x^t \in S$ – по определению $f^{(k)}_{\text{рек}}$).

Таким образом, при $F \equiv f$ процесс генерации упорядоченной последовательности вариантов обрывается после получения первого же варианта, принадлежащего множеству S; этот вариант является оптимальным решением задачи (6). В случае $F \not\equiv f$ после образования каждого очередного варианта упорядоченной последовательности корректируется значение рекорда и при необходимости запоминается новый кандидат в оптимальные решения. Последний объявляется оптимальным решением задачи (6), как только на некотором шаге k будет выполнено условие $F(x^k) \geqslant f^{(k)}_{\text{рек}}$.

В качестве оценочной желательно выбрать такую целочисленную задачу, которая, с одной стороны, давала бы достаточно точную оценку, а с другой – позволяла экономно генерировать упорядоченную последовательность ее допустимых решений. Удачное сочетание этих двух факторов является решающим для эффективного применения метода УИ.

В методе Бендерса роль исходной задачи (6) играют задачи (2), которые сами являются оценочными для (2′). Для каждой задачи (2) строится оценочная (см. 4.3), для которой будет генерироваться упорядоченная последовательность вариантов. При переходе от k к $k + 1$ такая оценочная задача меняется не очень существенно, и это можно использовать при организации упорядоченного перебора ее вариантов.

В ряде случаев важно не ограничиваться вычислением оптимального решения (6), которая сама может являться оценочной по отношению к другой задаче, а иметь возможность строить последовательность ее допустимых решений x^t, упорядоченных по возрастанию значений $f(x^t)$. Для этого используются следующие схемы.

Схема $А_у$. Применяется при $F \equiv f$. Процесс генерации допустимых решений $x^t \in P$ задачи (5), упорядоченных по возрастанию $F(x^t)$, не обрывается после получения оптимального решения задачи (6), и в строящуюся последовательность $\{x^{t_\tau}\}_f \uparrow$ поочередно включаются те x^{t_τ}, которые принадлежат S.

Схема $Б_у$. Используется в случае $F \not\equiv f$. В процессе УИ вариантов $x^t \in P$ после генерации p вариантов, $p \geqslant k$, в $\{x^{t_\tau}\}_f \uparrow$ включаются в порядке возрастания значений $f(x^{t_\tau})$ те $x^{t_\tau} \in S$, $1 \leqslant t_\tau \leqslant p$, для которых $f(x^{t_\tau}) \leqslant F(x^p)$.

Схема УИ неоднократно применялась при решении задач дискретного программирования. Обычно для генерации упорядоченной последовательности использовался метод ветвей и границ со стратегией ветвления узла с наилучшей оценкой, применявшейся к оценочной дискретной задаче (см., например [14]). При этом приходится запоминать, как и в схеме $Б_у$, много "лишних" вариантов $x^t \in S$ с $f(x^t) > F(x^p)$. Для оценочных задач простой структуры можно строить специальные алгоритмы УИ, позволяющие генерировать упорядоченную последовательность $\{x^t\}_f \uparrow$ без построения "лишних" вариантов (см. [3, 4]). Эти алгоритмы являются обобщениями соответствующих алгоритмов динамического программирования (ДП).

3.3. Базовый алгоритм упорядочивающей индексации. Рассмотрим задачу о рюкзаке

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant b_0, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad j \in J := \{1,\ldots,n\}, \tag{7}$$

где c_j, a_j, b_0 – неотрицательные целые числа. Определим для произвольного $l \in R$ последовательность расширяющихся множеств

$$G_k(l) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \geqslant l, \ x_j \in \{0,1\} \right\}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Пусть $G_0(l) := \{0\}$ при $l \leqslant 0$ и $G_0(l) := \phi$ при $l > 0$. Множества $G_k(l)$, $G_{k-1}(l)$ связаны следующим рекуррентным соотношением, аналогичным уравнению Беллмана ДП

$$G_k(l) := G_{k-1}(l) U \{G_{k-1}(l - a_k) + c_k\}, \quad l \in [0, b_0], \quad k = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

($G_{k-1}(l) := G_{k-1}(0)$ при $l < 0$). Запишем результаты вычислений по (8) в таблицу из n строк и $(b_0 + 1)$ столбцов. В клетку (n, l) заносятся все элементы множества $G_k(l)$, в (n, b_0) – все значения, которые принимает целевая функция задачи (7) на множестве ее допустимых решений. Обозначим множество этих значений через Z.

Множество P допустимых решений задачи (7) можно разбить на подмножества $P(z) := \{x \in P \mid cx = z\}$, $P = \underset{z \in Z}{U} P(z)$. "Обратным ходом", т.е. процедурой, обратной построению таблицы, с началом в клетке (n, b_0), можно построить все $x^t \in P(z)$. Перебирая $z \in Z$ в порядке их увеличения и генерируя "обратным ходом" все варианты из $P(z)$, построим требуемую последовательность допустимых решений задачи (7), упорядоченных по возрастанию значений целевой функции.

При использовании алгоритмов УИ обычно заранее определяется верхняя граница $\hat{z}$ для перебираемых значений целевой функции. Тогда в $G_k(l)$ можно включать только $z \in [0, \hat{z}]$.

Информацию, содержащуюся в описанной таблице, выгодно записать более экономно. Заметим, что если число z входит в множество $G_{k_0}(l_0)$, то $z \in G_k(l)$

$\forall k \geq k_0,\ l \leq l_0$. Для произвольного $z, z \in \bigcup_{k,l} G_k(l)$, существует хотя бы одна такая пара индексов $[k(z), l(z)]$, называемых угловыми (corner indexes), что $z \in G_k(l)\ \forall k \geq k(z)$, $l \leq l(z)$ и $z \notin G_{k(z)-1}(l(z))$, $z \notin G_{k(z)}(l(z) + 1)$. В дальнейшем пары угловых индексов будем называть *наборами* в связи с тем, что при построении таблиц УИ сразу для нескольких (скажем, s) рюкзачных ограничений вместо запоминания для фиксированного z s пар угловых индексов выгодно записывать единый набор вида $[k; l_1,..., l_s]$. Для фиксированного z может существовать несколько, но не более n, наборов угловых индексов.

Таким образом, таблицу УИ удобно представить в виде столбцов, отвечающих различным значениям $z \in \{0, 1,..., \hat{z}\}$. В столбец z записываются соответствующие наборы угловых индексов. Если в некотором столбце z нет ни одного набора, то это означает, что не существует ни одного допустимого решения задачи (7) с $cx = z$.

Определение 2. Для задачи (7) набор $[k_1, l_1]$ столбца z_1 *доминируется* набором $[k_2, l_2]$ столбца $z_2, z_2 \leq z_1$, если $k_1 \geq k_2, l_1 \leq l_2$.

Построение наборов таблицы УИ осуществляется непосредственно. Если выписаны все наборы с $j = 1,..., k-1$, то по произвольному набору $[j, l]$ столбца z строится набор $[k, l + a_k]$, который записывается в столбец $z + c_k$, если только он не доминируется уже записанным ранее в этот столбец набором. (Алгоритм УИ с циклом по j.)

Полезно заметить, что алгоритм построения таблицы может быть организован иначе. Если выписаны все наборы для $z = 0, 1,..., z_0-1$, то в столбец z_0 записываются не доминируемые друг другом наборы $[j, l_t + a_j]$, образуемые из наборов $[j_t, l_t], j_t < j$, столбцов $z_0-c_j, j \in J$. (Алгоритм УИ с циклом по z.) Легко видеть, что при такой алгоритмизации для построения наборов столбца z_0 таблицы используются только последние c столбцов, $c := \max_{j \in J} c_j$. Этот алгоритм будет применен при корректировке таблиц УИ в п. 3.2 разд. 4.

При построении таблицы УИ, задаваемой наборами угловых индексов, требование целочисленности a_j, b_0 оказывается несущественным, так что описанный алгоритм УИ, который назовем базовым, применим для решения задачи (7) при $c \in Z_+^n$, $a \in R_+^n$, $b_0 \in R_+$.

Если коэффициенты c_j дробные, построим новую задачу, оценочную по отношению к (7), заменив целевую функцию $f(x) = cx$ на $F(x) = [c]x$, где $[c] = ([c_1],..., [c_n])$. Применив к этой оценочной задаче базовый алгоритм УИ, будем строить упорядоченную последовательность допустимых решений исходной задачи (7) по схеме $Б_у$ с учетом того, что $S \equiv P$.

Все сказанное легко переносится на задачу (7) с дополнительными ограничениями

$$\sum_{j \in J_s} x_j \leq 1,\ \ s = 1,\dots,p,\ \ J_s = \{j_s, j_s + 1,\dots,k_s\}, \tag{9}$$

где $j_1 = 1$, $k_p = n$, $j_{s-1} < j_s$, $k_{s-1} < k_s$ и $\bigcup_s J_s = J$. Ограничения (9) при $j_s = k_{s-1} + 1$ возникают, например, при сведении сепарабельных задач целочисленного программирования к булевым. Для задач с ограничениями (9) для каждого j определяется число $s(j)$, равное максимальному s, $s < j$, такому, что фиксация $x_j = x_s = 1$ не нарушает условий (9). При построении таблиц УИ по описанным схемам наборы $[k, l_t]$ образуются только из таких наборов $[j, l_\tau]$, для которых $j \leq s(k)$.

Замечание 3 (о связи алгоритмов УИ и ДП). Угловые индексы были введены для реализации алгоритма ДП для задачи о рюкзаке. (Функция Беллмана $g_k(l) = \min\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \geq l,\ x_j \in \{0,1\}\right\}$ – удовлетворяет следующему свойству: $g_{k_0}(l_0) \geq g_k(l)\ \ \forall k \geq k_0,\ l \leq l_0$.) Известно, что в алгоритме ДП для задачи о рюкзаке с

$x_j \in Z_+$ в случае, когда переменные перенумерованы в порядке возрастания отношений c_j/a_j, в таблице ДП в каждом столбце z содержится не более одного набора угловых индексов. В задачах о рюкзаке с булевыми или ограниченными сверху ($x_j \leqslant d_j$) целочисленными переменными могут появиться дополнительные наборы, число которых существенно зависит от перенумерации переменных. Вычислительный опыт показывает, что число наборов в таблицах УИ примерно в 1,5–2 раза превышает число наборов в соответствующих таблицах ДП [15]. Отметим также, что если в алгоритме ДП в таблицу записываются только недоминируемые наборы, то в алгоритме УИ лишь в одном и том же столбце наборы недоминируемы, однако набор столбца z_1 может доминироваться набором столбца z_2 при $z_2 < z_1$. Таким образом, таблица УИ содержит все наборы таблицы ДП и некоторое число других наборов.

3.4. Алгоритмы УИ для задачи о рюкзаке с одной непрерывной переменной. Для применения метода УИ в схеме Бендерса необходимо построить алгоритм УИ для задачи

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \nu \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \nu \geqslant b_0, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad \nu \geqslant 0, \tag{10}$$

где $c_j \geqslant 0$, целые; $a_j \geqslant 0$, $b_0 > 0$.

Базовым алгоритмом п. 3.3 построим таблицу УИ для задачи (10) при $\nu = 0$. В наборах $[k_t, l_t]$ произвольного столбца z индексы k_t, l_t строго возрастают, так как наборы одного столбца таблицы УИ недоминируемы. Пусть последний набор столбца $z - [k_{t(z)}, l_{t(z)}]$. Тогда

$$\varphi^{(0)}(z) := \min\left\{ z + \nu \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \nu \geqslant b_0, \quad x_j \in \{0,1\}, \ \nu \geqslant 0 \right\} = z + (b_0 - l_{t(z)})_+.$$

(Если в столбце z нет ни одного набора, положим $\varphi^{(0)}(z) = \infty$.) Обозначим $\nu(z) := (b_0 - l_{t(z)})_+$.

Запишем числа $\varphi^{(0)}(z)$, $z = 0, 1, ..., \hat{z}$, в вспомогательную таблицу, которая будет служить для организации упорядоченного перебора. Для z, упорядоченных в порядке возрастания чисел $\varphi(z)$, базовым алгоритмом УИ будем строить все варианты, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = l_{t(z)}, \quad x_j \in \{0,1\}. \tag{11}$$

В ходе построения вариантов при фиксации очередной переменной x_j дополнительно определяется, на какую величину Δ_j, $0 < \Delta_j \leqslant \hat{z} - \varphi^{(0)}(z)$, возрастет значение целевой функции задачи (10) при иной фиксации – не приводящей к построению решения системы (11). Для запоминания этих "сходов" со строящихся вариантов организуется *таблица сходов*, в столбцах Δ, $\Delta = 1, \ldots$, которой запоминаются номера тех вариантов и значения j, коим соответствуют отклонения Δ_j: $\Delta \leqslant \Delta_j < \Delta + 1$. После перебора всех решений системы (11) для некоторого $z = z_0$ минимальное из соответствующих им отклонений $\Delta \in Z_+$ прибавляется к $\varphi^{(0)}(z_0)$ и полученное таким образом число $\varphi^{(1)}(z_0)$ заносится в вспомогательную таблицу вместо $\varphi^{(0)}(z_0)$.

Когда на некотором шаге минимальным значением в вспомогательной таблице станет число $\varphi^{(1)}(z_0)$, строят (с использованием таблицы сходов) все варианты с $cx = z_0$ и $cx + \nu \in [\varphi^{(1)}(z_0), \varphi^{(1)}(z_0) + 1]$; вычисляется $\varphi^{(2)}(z_0)$, которое записывается вместо $\varphi^{(1)}(z_0)$ и т.д. Построение вариантов прекращается, когда все $\varphi(z)$ станут больше $\hat{z}$★.

★ Алгоритм и программа на языке ФОРТРАН, реализующие описанную процедуру, разработаны В.А. Кушнером.

В описанном алгоритме для построения вариантов с фиксированным значением целевой функции ($\varphi^{(k)}(z)$, $k \geqslant 1$) используются варианты с меньшими значениями ($\varphi^{(p)}(z)$, $p < k$), по которым строится таблица сходов. В 3.3 разд. 4 использование в схеме Бендерса оценок лагранжевой релаксации или оценок расслоения позволяет сократить перебор, так как из рассмотрения исключаются некоторые значения целевой функции. Приведенный алгоритм, естественно, не может применяться для такого сокращения перебора. Ниже описан другой алгоритм УИ, позволяющий непосредственно строить допустимые решения задачи (10) с произвольным значением целевой функции и основанный на дискретизации переменной ν.

Если в (10) все коэффициенты c_j, a_j, b_0 – целые неотрицательные числа, то для произвольного x оптимальное значение ν целочисленно. Поэтому можно наложить на ν требование целочисленности и после замены $\nu = \sum_k k\nu_k,\ \sum_k \nu_k \leqslant 1,\ \nu_k \in \{0,1\}$, применить базовый алгоритм п. 3 разд. 3 (с учетом ограничений типа (9)).

При произвольных c_j, a_j, $b_0 \in R_+$ выберем некоторое δ, $0 < \delta \leqslant 1$, положим $\nu = \delta \sum_k k\gamma_k,\ \sum_k \gamma_k \leqslant 1,\ \gamma_k \in \{0,1\}$ и рассмотрим задачу

$$\delta\left(\sum_{j=1}^{n} [c_j / \delta] x_j + \sum_k k\gamma_k\right) \to \min,\ \sum_{j=1}^{n}]a_j / \delta[x_j + \sum_k k\gamma_k \geqslant [b_0 / \delta],$$

$$\sum_k \gamma_k \leqslant 1,\ x_j,\ \gamma_k \in \{0,1\},$$

являющуюся оценочной по отношению к (10). Применив к ней схему $Б_у$, получим возможность генерировать упорядоченную последовательность решений задачи (10). С уменьшением δ растет точность аппроксимации (и, следовательно, уменьшается число "лишних" вариантов схемы $Б_у$), однако увеличивается число переменных γ_k и z.

3.5. Метод УИ для задачи ЦЛП с несколькими рюкзачными неравенствами и одной непрерывной переменной. В схеме Бендерса на каждой итерации надо решать задачу вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \nu \to \min,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \nu \geqslant b_i,\ i \in I,\ x_j \in \{0,1\},\ \nu \geqslant 0, \tag{12}$$

где $c_j \geqslant 0$, целые; $a_{ij} \geqslant 0$, $b_i > 0$. Не вызывает затруднений включение в (12) дополнительных ограничений (9). При решении задачи (12) методом УИ часто выгодно одновременно рассматривать несколько оценочных к (12) задач о рюкзаке с одной и той же целевой функцией $cx + \nu$ и разными рюкзачными неравенствами, скажем, для $i \in I_у \subseteq I$. Одновременное построение таблиц УИ для задач о рюкзаке позволяет взаимно корректировать эти таблицы, что не только уменьшает их размеры и тем самым сокращает число перебираемых вариантов, но в ряде случаев приводит к усилению вычисляемой оценки.

Идеи корректировки таблиц УИ те же, что используются для полностью целочисленных задач в [3, 4]. Если при построении наборов, получаемых из наборов столбца z_0 с помощью фиксации $x_j = 1$, окажется, что хотя бы для одного $i \in I_у$ новый набор неперспективен, т.е. не может привести к построению хотя бы одного варианта с $z \leqslant \hat{z}$, то в столбец $z_0 + c_j$ не записывается не только этот набор, но и соответствующие наборы других таблиц УИ для остальных $i \in I_у$.

Набор $[k, l_i]$ столбца z i-й таблицы УИ является неперспективным, если

$$z + \varphi_k(l_i) > \hat{z}, \tag{13}$$

$$\varphi_k(l_i) \leqslant g_k(l_i) := \min\left\{ \sum_{j=k+1}^{n} c_j x_j + \nu \,\middle|\, \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j + \nu \geqslant b_i - l_i,\ x_j \in \{0,1\},\ \nu \geqslant 0 \right\}.$$

Оценку $\varphi_k(l_i)$ можно вычислить, решив соответствующую релаксированную задачу простой структуры либо непосредственно вычислив $g_k(l_i)$ по алгоритму ДП. Последний целесообразно использовать при обратном порядке переменных ($j = n, n-1, \ldots, k$) в рекуррентных уравнениях Беллмана (так называемое "встречное решение" ДП [16]). Будем называть такие таблицы ДП *обратными*. Вычислив обратные таблицы ДП для $i \in I_y$, можно проверять тест на неперспективность строящихся наборов для разных k, не пересчитывая эти таблицы. Обратные таблицы строятся для $\nu = 0$, после чего перебором значений z с вычислением соответствующих $\nu(z)$ находится $g_k(l_i)$.

Опыт решения задач ЦЛП показывает, что использование нескольких неравенств для построения таблиц УИ с их взаимной корректировкой, согласно (13), дает эффект тем меньший, чем больше разброс коэффициентов в столбцах системы этих неравенств. Поэтому трудно ожидать, что этот эффект будет существенным при использовании для построения таблиц УИ отсечений Бендерса.

Намного вероятнее, что образуемые специальным образом разд. 5 начальные ограничения окажутся более подходящими для этой цели. Мотивация для такого ожидания следующая. После построения нескольких начальных ограничений разд. 5 по каждому из них строится таблица УИ; эти таблицы взаимно корректируются согласно (13). В результате получается оценка снизу для оптимального значения задачи (1). Построение очередного начального ограничения проводится так, чтобы максимально увеличить эту оценку. Процесс построения начальных ограничений разд. 5 прекращается, когда вычисляемая оценка перестает увеличиваться. Таким образом, введение каждого из начальных ограничений (кроме последнего) повышает, вследствие самого принципа их построения, эффект от совместного использования в методе УИ.

До тех пор пока не существовало более тонкого, чем (13), механизма взаимной корректировки таблиц УИ, намечался следующий путь реализации метода Бендерса. Таблицы УИ предполагалось строить только для начальных ограничений разд. 5, а последовательно образующиеся в результате решения методом УИ задач (2) отсечения Бендерса использовать лишь для отсева вариантов, не удовлетворяющих ограничениям (2), причем этот отсев производить только после построения варианта. При таком подходе строящиеся отсечения Бендерса не оказывают никакого влияния на сокращение числа перебираемых вариантов. Единственный выигрыш от их введения состоит в том, что для отсеенного по ним варианта x^t не надо вычислять y^t – оптимальное решение соответствующей задачи ЛП, получаемой из (1) при фиксации $x := x^t$.

К счастью, исследования, связанные с оценками расслоения, выявили возможность строить для $i \in I_y$ вместо $m_1 := |I_y|$ таблиц УИ одну, оценивая "хвост" либо по m_1 обратным таблицам ДП соответствующих задач о рюкзаке, либо по релаксированным задачам о рюкзаке. Последняя оценка вычисляется исключительно просто (см. 4.3). В результате использования такой специальной оценки расслоения п. 3.2 разд. 4 для отсева неперспективных вариантов в алгоритме УИ, где строится таблица УИ с наборами вида $[k; l_1, \ldots, l_{m_1}]$, вместо (13) используется соотношение вида $z + \varphi_k(l_1, \ldots, l_{m_1}) > \hat{z}$.

Оценка расслоения $\varphi_k(l)$, $l = (l_1, \ldots, l_{m_1})$, уже не зависит от разброса коэффициентов, достаточно точна и, как было сказано, исключительно просто может быть вычислено ее приближенное значение $\tilde{\varphi}_k(l)$, $\tilde{\varphi}_k(l) \leqslant \varphi_k(l)$. Если $z + \tilde{\varphi}_k(l) > \hat{z}$, то построенный набор неперспективен и не записывается в таблицу УИ. В противном случае при $\hat{z} - z + \tilde{\varphi}_k(l) \geqslant \Delta$ целесообразно записать проверяемый набор в эту таблицу, а при $\Delta > \hat{z} - z - \tilde{\varphi}_k(l) \geqslant 0$ – вычислить точное значение оценки $\varphi_k(l)$ по m_1 обратным таблицам ДП для m_1 задач о рюкзаке для окончательного решения вопроса о записи или исключении набора. Пороговый коэффициент Δ следует определять на основе вычислительного эксперимента.

4. ОЦЕНКИ РАССЛОЕНИЯ

4.1. Стратегия расслоения переменных (layering strategies [8]). Она применяется для декомпозиции задач ЛП и получения оценок в ЦЛП. Основную ее идею удобно пояснить на примере задачи ЦЛП вида

$$cx \to \min =: \bar{z}, \ \ A_1 x \geqslant b^1, \ \ A_2 x \geqslant b^2, \ \ x \in X, \tag{14}$$

где $A_1 \in R^{m_1 \times n}$, $A_2 \in R^{m_2 \times n}$, $m_1 + m_2 = m$, $X = \{x \in R^n | 0 \leqslant x \leqslant d, x -$ целочисленный$\}$. В подсистеме $A_2 x \geqslant b^2$ заменим x на y и включим условия $x = y$ в функцию Лагранжа. В результате получим оценку, которую будем называть оценкой расслоения

$$\varphi(\upsilon) \to \max_{\upsilon \in R^n} =: z_p^0, \tag{15}$$

$$\varphi(\upsilon) := \min\{(c - \upsilon)x | A_1 x \geqslant b^1, \ \ x \in X\} + \min\{\upsilon y | A_2 y \geqslant b^2, \ \ y \in Y\}, \tag{16}$$

где $Y \supseteq X$, например $Y = Y_0 := \}y \in R^n | 0 \leqslant y \leqslant d\}$. В [7] показано, что при произвольном Y, $Y \supseteq X$, имеют место неравенства $z_л \leqslant z_p^0 \leqslant \bar{z}$, где $z_л$ – оценка лагранжевой релаксации

$$z_л := \max_{u \geqslant 0} \min\{cx + u(b^2 - A_2 x) | A_1 x \geqslant b^1, \ \ x \in X\}. \tag{17}$$

Наиболее сильная оценка вида (15), (16) получается при $Y = X$. Однако при этом каждая подзадача в (16) будет целочисленной, так что вычисление z_p^0 трудно реализуемо. При $Y = Y_0$ вторая подзадача в (16) – задача ЛП. При разумном разбиении ограничений (в первую подсистему можно включить только одно, например заменяющее, ограничение) целочисленная подзадача решается достаточно экономно. По оптимальным решениям подзадач вычисляется субградиент функции $\varphi(\upsilon)$, так что для расчета z_p^0 применим любой из методов негладкой оптимизации [12, 18].

Конечно, переменные задачи можно расслоить не на две, а на большее число групп, оставив в каждой подзадаче $Y = X$. Однако с введением каждой новой группы число множителей Лагранжа увеличивается на n. Так, при разбиении на m групп и включении в функцию Лагранжа с множителями w_{ij} условий $y_{1j} = y_{ij}$, $i \in I_1 := \{2, \ldots, m\}$, $j \in J := \{1, \ldots, n\}$, $(y_{1j} := x_j)$, получим оценку

$$\sum_{i \in I} \min\{w^i y^i | a^i y^i \geqslant b_i, \ \ y^i \in X\} \to \max_{w \in W} =: z_p^1, \tag{18}$$

где $y^i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$, $w^i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$, $w^1 := c - \sum_{i \in I_1} w^i$, $W := \{w \in R^{mn} | \sum_{i \in I} w^i = c\}$, а $a^i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ – строки матрицы $A := (A_1^{\mathrm{T}}, A_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Очевидно, $z_p^0 \leqslant z_p^1 \leqslant \bar{z}$. Однако вычисление z_p^1 реально только при небольших значениях m и n.

4.2. Новые оценки расслоения. Применим для приближенного вычисления оценки (18) следующий прием. Пусть в (14) $m_1 = 1$. Вторую подзадачу (16) при $\upsilon = \bar{\upsilon}$, где $\bar{\upsilon}$ – оптимизирующий вектор задачи (15), представим в эквивалентном виде, применив к ней стратегию расслоения переменных на $m_2 = m-1$ групп: $y^i \in Y_0$, $i \in I_1$. В результате получится оценка вида (18), в подзадачах $i \in I_1$ которой условия $y^i \in X$ заменены на $y^i \in Y_0$. Оптимальные значения множителей w_{ij} этой задачи двумя различными способами можно выразить через $\bar{\upsilon} \in R^n$ и вектор $\bar{u} \in R^{m-1}$ разрешающих множителей линейной подзадачи из (16) при $\upsilon = \bar{\upsilon}$ (см. теорему 1). В обоих случаях получаются оценки, равные z_p^0. Однако теперь их можно усилить достаточно экономно, проведя обратную замену в подзадачах $i \in I_1$ требований $y^i \in Y_0$ на $y^i \in X$ и получив таким образом оценки со значениями, лежащими между $\overset{0}{z_p}$ и $\overset{1}{z_p}$.

Рассмотрим сначала задачу ЛП. Расслоим переменные задачи

$$rx \to \min =: \sigma, \quad a^i x \geqslant b_i, \quad i \in I', \quad 0 \leqslant x \leqslant d, \tag{19}$$

на $m' := |I'|$ групп

$$\sum_{i \in I'} \min\{w^i y^i | a^i y^i \geqslant b_i, \ y^i \in Y_0\} \to \max_{w \in W'} =: \sigma_1, \tag{20}$$

где $W' := \{w \in R^{m' \times n} | \sum_{i \in I'} w^i = r\}$ и $\sigma_1 = \sigma$, согласно теории двойственности ЛП.

Теорема 1. *Пусть $\bar{x}$ – оптимальное базисное решение задачи* (19), *а $\bar{u}$ – соответствующий ему вектор разрешающих множителей. Оптимальное решение задачи* (20) *не единственно. Существуют такие оптимальные ее решения $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, что для каждого $j \in J$: а) $w_{ij}^{(1)} / a_{ij}\bar{u}_i = p_j \ \forall i \in I'$, б) $w_{ij}^{(2)} - a_{ij}\bar{u}_i = k_j \ \forall i \in I'$, где $p_j = r_j / \sum_{i \in I'} a_{ij}\bar{u}_i$, $k_j = \frac{1}{m'}(r_j - \sum_{i \in I'} a_{ij}\bar{u}_i)$.*

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\bar{x}$ – оптимальное невырожденное базисное решение задачи* (19), *а $\bar{u}$ – соответствующий ему вектор разрешающих множителей. Если $\bar{w}$ – оптимальное решение задачи* (20), *то $\bar{y}^i := \bar{x}$, $i \in I'$, являются оптимальными решениями соответствующих подзадач* (20) *(при $w := \bar{w}$), а $\bar{u}_i$ – их разрешающими множителями.*

Доказательство. Поскольку $\bar{x}$ – допустимое решение (19), то $\bar{y}^i$ – допустимые решения соответствующих подзадач (20). Следовательно $f(\bar{y}) := \sum_{i \in I'} \bar{w}^i \bar{y}^i \geqslant \sigma_1$. Так как $\bar{w} \in w'$, то $f(\bar{y}) = \sum_{i \in I'} \bar{w}^i \bar{x} = r\bar{x} = \sigma$, а поскольку $\sigma = \sigma_1$, то $\sum_{i \in I'} \bar{w}^i \bar{y}^i = \sigma_1$ и $\bar{y}^i$, $i \in I'$, – оптимальные решения соответствующих подзадач (20) при $w := \bar{w}$.

Пусть λ_i, $i \in I'$, – разрешающие множители подзадач $i \in I'$ в (20) при $w := \bar{w}$. Обозначим $\mu_j^{(i)} := \bar{w}_{ij} - a_{ij}\lambda_i$ и введем множества $J_б := \{j \in J | 0 < \bar{x}_j < d_j\}$, $J_0 := \{j \in J | \bar{x}_j = 0\}$, $J_d := \{j \in J | \bar{x}_j = d_j\}$. Поскольку $\bar{x}$ – невырожденное базисное решение, то $|J_б| = m'$. Для оптимального решения i-й подзадачи $\bar{y}^i = \bar{x}$, $i \in I'$ выполняются условия оптимальности

$$1)\ \mu_j^{(i)} = 0, \ j \in J_б, \quad 2)\ \mu_j^{(i)} \geqslant 0, \ j \in J_0, \quad 3)\ \mu_j^{(i)} \leqslant 0, \ j \in J_d. \tag{21}$$

Просуммировав по $i \in I'$ при фиксированном $j \in J$ соответствующие условия оптимальности, получим, учитывая $\bar{w} \in W'$, соотношения $\mu_j := r_j - \sum_{i \in I'} a_{ij}\lambda_i = 0$, $j \in J_б$, $\mu_j \geqslant 0$, $j \in J_0$, $\mu_j \leqslant 0$, $j \in J_d$, являющиеся условиями оптимальности $\bar{x}$ задачи ЛП (19). Из $\mu_j = 0$, $j \in J_б$, вектор разрешающих множителей задачи (19) определяется однозначно. Следовательно, $\lambda := (\lambda_i, i \in I') = \bar{u}$.

Замечание 4. Предположение о невырожденности $\bar{x}$ легко снимается, так как известным ε-приемом можно добиться того, чтобы произвольное базисное решение задачи ЛП было невырожденным.

Следствие 1. Для произвольного $j \in J$: а) все $\mu_j^{(i)}$, $i \in I'$, и μ_j – одного знака; б) все $p_j^{(i)} := \bar{w}_{ij} / a_{ij}\bar{u}_i - 1$, $i \in I'$, и $p_j := r_j / \sum_{i \in I'} a_{ij}\bar{u}_i - 1$ – одного знака.

Доказательство теоремы. Оптимальные решения y^i, $i \in I'$, подзадач (20) не меняются при любых изменениях вектора w, при которых сохраняются условия оптимальности (21). Согласно следствию 1, при переходе от вектора $\bar{w}$ леммы 1 к $w^{(1)}$ или $w^{(2)}$, определенным в формулировке теоремы 1, условия оптимальности (21) сохраняются неизменными. Легко видеть, что $w^{(1)}, w^{(2)} \in W'$. Кроме того, не меняется и значение целевой функции задачи (20), поскольку для $\bar{y} = (\bar{y}^i, i \in I')$ $w^{(t)}\bar{y} = r\bar{x}$, $t = 1,2$, в силу $w^{(1)}, w^{(2)} \in W'$.

Применив теорему 1 к задаче ЛП из (16) при $m' := m-1$, $I' := I_1$, $r := \bar{\upsilon}$, получим в случае б) $w_{ij}^{(2)} = a_{ij}\bar{u}_i + \dfrac{1}{m-1}(r_j - \sum\limits_{k \in I_1} a_{kj}\bar{u}_k)$, а в случае а)

$$w_{ij}^{(1)} = a_{ij}\bar{u}_i\bar{\upsilon}_j \,/ \sum_{k \in I_1} a_{kj}\bar{u}_k, \quad i \in I_1, \quad j \in J.$$

Подставив эти выражения в (20) и вернувшись от требований $y^i \in Y_0$ к $y^i \in X$, имеем две (вообще говоря, различные) оценки вида (18), более сильные, чем $\overset{0}{z}_p$, но не менее сильные, чем $\overset{1}{z}_p$. В дальнейшем будет использована только оценка, соответствующая случаю а) теоремы 1

$$z_p^2 := \min\{(c - \bar{\upsilon})x | a^1 x \geqslant b^1, \ x \in X\} +$$

$$+ \sum_{i \in I_1} \bar{u}_i \min\left\{ \sum_{j \in J} \frac{a_{ij}\bar{\upsilon}_j}{\sum\limits_{k \in I_1} a_{kj}\bar{u}_k} y_{ij} \middle| a^i y^i \geqslant b_i, \ y^i \in X \right\}. \tag{22}$$

Отметим одно важное свойство оценки (22): отношения коэффициентов целевых функций к коэффициентам ограничений подзадач $i \in I_1$ в (22) не зависят от i.

Замечание 5. Более слабые оценки расслоения получатся, если в качестве (19) взять релаксированную задачу (14): $m' = m$, $I' := I$, $r := c$. В этом случае $w_{ij}^{(t)}$, $t = 1, 2$, выражаются только через m множителей $\bar{u}_i$, $i \in I$.

Замечание 6. Выразив w_{ij} через произвольные $u_i \in R^m$, $\upsilon \in R^n$ по а) или б) теоремы 1, можно вычислять оценки расслоения без решения задачи (16), оптимизируя получающиеся выражения по (u, υ). При этом будут использоваться решения m подзадач ЛП простейшего вида: каждая из них содержит только одно ограничение.

4.3. Оценки расслоения в методе Бендерса. Оценки расслоения можно эффективно использовать в методе Бендерса для сокращения числа перебираемых вариантов как при решении методом УИ отдельной задачи (2), так и при реализации всего процесса в целом. В п. 3.2–3.4 разд. 4 намечены три направления такого их применения.

4.3.1. О вычислении оценок расслоения в методе Бендерса. Наличие в задаче (2) одной непрерывной переменной не приводит к особым затруднениям при вычислении оценок расслоения п. 4.1, 4.2. Если ввести дискретизацию ν (см. конец п. 3.4), то вычисление $\overset{0}{z}_p$, $\overset{2}{z}_p$ проводится точно по схеме п. 4.1, 4.2. Более точные оценки получаются в случае, когда непрерывная переменная ν не расслаивается в подзадачах $i \in I_1$.

Замечание 7. Когда в (16) $m_1 = 1$, оценка расслоения совпадает с непрерывной оценкой $z_н$ (см. п. 3.1), если в оптимальном решении первой подзадачи (16) значение ν окажется положительным. Именно такая ситуация типична для метода Бендерса. Поэтому в задачах ЧЦЛП, во все ограничения которых входят непрерывные переменные, полезно вывести из исходных ограничений неравенства (одно или несколько), содержащие только целочисленные переменные, с тем чтобы использовать одно из них для формирования первой подзадачи в (16). Например, в задачу размещения

$$\sum_i c_i x_i + \sum_{i,j} r_{ij} y_{ij} \to \min, \ \sum_j y_{ij} \leqslant a_i x_i, \ i \in I, \ \sum_i y_{ij} = b_j, \ j \in J, \ y_{ij} \geqslant 0, \ x_i \in \{0,1\}$$

полезно включить неравенство $\sum_i a_i x_i \geqslant b_0 := \sum_j b_j$, являющееся следствием исходных ограничений.

Учитывая замечание 7, оценку (15), (16) целесообразно использовать лишь в случае, когда непрерывная переменная ν задачи (2) содержится только в ограничениях второй подзадачи из (16). Поэтому в п. 4.3.1, 4.3.2 предполагается, что $m_1 = 1$ и ν не входит в первую подзадачу в (16), так что вопрос ее расслоения для (15), (16) отпадает.

При вычислении оценки z_p^2 без расслоения переменной ν будем рассматривать ν как параметр. Построим в модифицированной задаче (22) (где ν войдет в целевые функции и ограничения для $i \in I_1$; обозначим такую задачу (22′)) таблицы ДП (УИ) для подзадач $i \in I_1$ при $\nu = 0$, а затем перебором значений $\nu(z)$ (см. п. 3.4) найдем ее оптимальное значение и соответствующие ему оптимальные $y^i \in X$, $i \in I_1$, а также оптимальный $x \in X$. (При дробных коэффициентах целевых функций надо провести их дискретизацию (см. п. 3.3) и использовать схему $Б_y$ п. 3.2.)

4.3.2. Нормальные варианты и корректировка таблицы УИ. Основное затруднение, возникающее при использовании оценок расслоения в рамках метода УИ, связано с тем, что в методе УИ генерируется упорядоченная последовательность некоторой оценочной задачи, в то время как ни одна из задач п. 4.1, 4.2 не подходит под определение 1 оценочной задачи. Ниже это определение будет обобщено применительно к стратегии расслоения переменных.

Определение 3. Пусть исходная задача имеет вид $f(x) \to \min$, $x \in S := S_1 \cap \ldots \cap S_k \cap X$.

Задача $F(y^1, \ldots, y^k) \to \min$, $y^i \in S_i \cap Y_i$, $i = 1, \ldots, k$, является оценочной по отношению к исходной, если а) $Y_i \supseteq X$, $i = 1, \ldots, k$, причем $Y_1 = X$, и б) для всех $(y^{1t}, \ldots, y^{kt})$ таких, что $y^{it} \in S_i \cap Y_i$, $y^{1t} = \ldots = y^{kt} =: x^t$, выполняется неравенство $F(y^{1t}, \ldots, y^{kt}) \leqslant f(x^t)$.

Варианты, удовлетворяющие условию б) определения 3, будем называть *нормальными*.

На нормальном варианте $\vec{x}^t := (x^t; y^{it}, i \in I_1)$, $y^{it} = x^t$, $i \in I_1$, значение целевой функции задачи (22) равно

$$F(\vec{x}^t) = (c - \overline{\upsilon})x^t + \sum_{j \in J} (\overline{\upsilon}_j \sum_{i \in I_1} a_{ij} \overline{u}_i \,/ \sum_{k \in I_1} a_{kj} \overline{u}_k) x_j^t = cx^t. \tag{23}$$

При реализации метода УИ с использованием в качестве оценочной одной из задач п. 4.1, 4.2 существенными являются только нормальные варианты. Остальные, в которых имеются $y^{it} \neq x^t$, никак не связаны с допустимыми решениями исходной задачи и заведомо должны быть отброшены. К счастью, их удается отсеять и алгоритмически: можно строить такие алгоритмы УИ, которые генерируют только нормальные варианты $\vec{x}^t$ в порядке возрастания $F(\vec{x}^t)$.

Ниже будет кратко описан подобный алгоритм УИ для задачи (2). В нем используется оценочная задача (22′). Для упрощения будем считать в п. 4.3.2, что $X = X_б := \{x \in R^n | x_j \in \{0,1\}, j \in J\}$.

Пусть задача (2) содержит m' неравенств с индексами $i \in I^k$, причем в первое из неравенств ($i = 1$) переменная ν не входит. Для всех неравенств при $\nu = 0$ строятся таблицы УИ; их наборы записываются в столбцы $z = cx^t$, соответствующие нормальному варианту $\vec{x}^t$, т.е. номер столбца z, согласно (23), равен сумме значений всех m' целевых функций подзадач из (22′) (при $\nu = 0$) на соответствующем нормальном варианте. С этой точки зрения все m' таблиц УИ образуют единую таблицу УИ, служащую для генерации упорядоченной последовательности нормальных вариантов. Учет ν реализуется так же, как в алгоритмах п. 3.4, 3.5.

Оценки вида (22) удобно использовать при коррекции таблицы УИ. Здесь будут применяться только оценки (22), в которых зафиксирован вектор $\bar{\upsilon}$ – оптимальное решение задачи (15), (16). Конечно, если решать (15), (16) при различных векторах b' (вместо вектора $b = (b^1, b^2)$), то эффект от корректировки усилится, однако это сопряжено со значительными вычислительными затратами.

После образования очередного набора $[j_0, l_i, i \in I^k]$ столбца z, прежде чем записывать его в таблицу УИ, проверяется, может ли он привести к получению нормального варианта со значением целевой функции $cx + \nu$, не превышающим заранее выбранной верхней границы $\hat{z}$ Для этого проверяется неравенство

$$z + \tilde{\varphi}^{(j_0)}(b - l) \leqslant \hat{z}, \tag{24}$$

где $b - l = \ (b_i - l_i, i \in I^k),\ \tilde{\varphi}^{(j_0)}(\cdot) \leqslant \varphi^{(j_0)}(\cdot) = \max\limits_{u \in R_+^{m'-1}} \varphi_u^{(j_0)}(\cdot),$

а

$$\varphi_u^{(j_0)}(b - l) := \min\left\{ \sum_{j=j_0+1}^{n} (c_j - \bar{\upsilon}_j) x_j \,\middle|\, \sum_{j=j_0+1}^{n} a_{1j} x_j \geqslant b_1 - l_1,\ x_j \in \{0,1\} \right\} +$$

$$+ \min_{\nu \geqslant 0} \left[\nu + \sum_{i \in I_1^k} u_i \min\left\{ \sum_{j=j_0+1}^{n} r_j a_{ij} y_{ij} \,\middle|\, \sum_{j=j_0+1}^{n} a_{ij} y_{ij} + \nu \geqslant b_i - l_i,\ y_{ij} \in \{0,1\} \right\} \right], \tag{25}$$

где $I_1^k := I^k \setminus \{1\},\ r_j := \bar{\upsilon}_j \,/ \sum\limits_{i \in I_1^k} a_{ij} u_i,\ j \in J$. Если (24) выполнено, набор не записывается. В противном случае в столбец z таблицы УИ записывается либо весь набор $[j_0, l_i, i \in I^k]$, если он является первым в столбце z, либо только недоминируемые предыдущими наборами столбца z пары $[j_0, l_i]$.

Для корректировки таблицы УИ по (24) ниже предлагаются два варианта, использующие как различные оценочные функции $\tilde{\varphi}^{(j)}(\cdot)$, так и различные алгоритмы построения таблицы УИ.

В первом из них $\tilde{\varphi}^{(j)}(\cdot) := \varphi_{\bar{u}}^{(j)}(\cdot)$, т.е. в задачах с различными l' максимизация по u не проводится. Зафиксировав $u := \bar{u}$ и построив для всех m' задач о рюкзаке (при $\nu = 0$) обратные таблицы ДП, можно достаточно просто, проводя оптимизацию по $\nu \geqslant 0$ (см. п. 3.4), вычислять $\varphi_{\bar{u}}^{(j)}(b')$ при любых j и b'.

Оценки $\tilde{\varphi}^{(j)}(\cdot)$ ослабляются, но зато упрощается их вычисление, если в (25) для $i \in I_1^k$ заменить требования $y_{ij} \in \{0,1\}$ на $0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1$. Тогда обратную таблицу ДП надо строить только для $i = 1$, а для вычисления оптимальных $y^i(\nu),\ i \in I_1^k$, быстрым "пожирающим" алгоритмом (при произвольных $b - l'$ и j_0) достаточно упорядочить по возрастанию числа $r_j,\ j \in J$. Оптимизация по $\nu \geqslant 0$ также упрощается, поскольку $\psi(\nu) := \nu + \sum\limits_{i \in I_1^k} \bar{u}_i \min\left\{ \sum\limits_{j > j_0} r_j a_{ij} y_{ij} \,\middle|\, \sum\limits_{j > j_0} a_{ij} y_{ij} + \nu \geqslant b_i - l_i,\ 0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1 \right\}$ является выпуклой кусочно-линейной функцией.

Во втором варианте наборы разбиваются на группы $s \in S$ с близкими l' и j_t, и для эталонного набора $[j_{t_s}; l^{t_s}]$ группы s находится $u^s := \arg\max_{u \geqslant 0} \varphi_u^{(j_s)}(b - l^{t_s})$. При проверке (24) для наборов группы s используются $\tilde{\varphi}^{(j)}(\cdot) := \varphi_{u^s}^{(j)}(\cdot)$ или соответствующие им ослабленные оценки, получаемые при переходе к требованиям $0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1,\ i \in I_1^k$. В последнем случае отпадает необходимость вычислять обратные таблицы ДП для $i \in I_1^k$ при каждом $s \in S$. Группы близких наборов естественным образом образуются при применении алгоритма УИ с циклом по z (см. конец п. 3.3). Этот алгоритм позволяет к тому же реализовать УИ, не запоминая полностью таблицу УИ: хранятся $l_i^k,\ i \in I_y \subset I^k$, а $l_i^t,\ i \in I^k \setminus I_y$, используемые лишь для корректировки таблицы, надо временно запоминать только для столбцов $z \in [z_0 - c, z_0]$, где z_0 – текущий строящийся столбец, а $c = \max_{j \in J} c_j$.

Можно сочетать различные оценки, начиная проверку (24) для слабых, но просто вычисляемых оценок, и в зависимости от величины невязки неравенства (24) либо отбрасывать проверяемый набор, либо записывать его, либо переходить к вычислению более сильной оценки, если есть надежда при этом переходе сократить невязку по меньшей мере до нуля.

4.3.3. Сокращение числа перебираемых значений целевой функции в методе УИ. При решении задачи (2) методом УИ целесообразно строить таблицы УИ только для ограничений (1), не содержащих непрерывных переменных (или для соответствующего им заменяющего неравенства) и для начальных неравенств разд. 5. Пусть все эти ограничения образуют первую подсистему из (14); множество их номеров обозначим I_y. Остальные ограничения, являющиеся отсечениями Бендерса, с номерами $i \in I_2^k := I^k \setminus I_y$, выделим в подсистему $A_2 x \geqslant b^2$. Вычислим оценку расслоения $z_p^{(k)}$ по (15) или (22), используя расслоение переменной ν на две в соответствии с (16). Легко видеть, что нормальные варианты получающейся оценочной задачи будут допустимыми решениями задачи (2).

Задача (2) образуется из (2) с $k := k-1$ добавлением k-го отсечения Бендерса. Пусть σ_k, σ_{k-1} – оптимальные значения этих задач. Имеем $z_p^{(k)} \leqslant \sigma_k$. Поскольку при вычислении оценки расслоения $z_p^{(k)}$ учитывается k-е отсечение Бендерса, то может оказаться, что $z_p^{(k)} > \sigma_{k-1}$. Поэтому перебор метода УИ для задачи (2) надо начинать не с $z = \sigma_{k-1}$, а с $z = \max\ \{]z_p^{(k)}[, \sigma_{k-1}\}$. В результате в случае $z_p^{(k)} > \sigma_{k-1}$ из перебора будут исключены целые группы вариантов, для которых $cx^t + \nu^t = z$ для z: $\sigma_{k-1} \leqslant z <]z_p^{(k)}[$. Платой за такое сокращение являются дополнительные затраты на вычисление оценки расслоения. Однако если оценка расслоения используется также и для корректировки таблицы УИ, то предлагаемая схема не потребует дополнительных вычислений.

Для реализации данной схемы при $z_p^{(k)} > \sigma_{k-1}$ алгоритм со сходами п. 3.4, 3.5 неприменим, так как в нем для построения вариантов (x^t, ν^t) с $cx^t + \nu^t = z_0$ требуются варианты для $z < z_0$. Поэтому здесь надо использовать алгоритм УИ, основанный на дискретизации ν (см. конец п. 3.4).

4.3.4. Нормальные варианты и квазиоптимальные решения. Оценку расслоения (15), (16) при $Y = Y_0$ можно записать, использовав функцию Лагранжа линейной подзадачи в (16)

$$z_p^0 = \min\{(c - \bar{\upsilon})x \mid A_1 x \geqslant b^1,\ x \in X\} + \min_{y \in Y_0}(\bar{\upsilon} - \bar{u}A_2)y + \bar{u}b^2, \tag{26}$$

где $\bar{\upsilon}$ – оптимальное решение задачи (16), а $\bar{u}$ – вектор разрешающих множителей линейной подзадачи в (16) при $\upsilon := \bar{\upsilon}$. Задача (2б) является оценочной по отношению к (14), поскольку на нормальном варианте $(x^t, x^t) F(x^t, x^t) = cx^t + \bar{u}(b^2 - A_2 x^t) \leqslant cx^t$, так как $\bar{u} \geqslant 0$ и $b^2 - A_2 x^t \leqslant 0$.

Таким образом, на нормальных вариантах функция F совпадает с функцией Лагранжа задачи (14), образуемой при включении в нее с множителями $\bar{u}_i$ ограничений $A_2 x \geqslant b^2$.

При решении (14) методомУИ можно одинаково использовать оценочные задачи, возникающие как при расслоении переменных (2б), так и при лагранжевой релаксации (17). По ограничениям первой подсистемы ($A_1 x \geqslant b^1$) будем строить таблицы УИ. Неравенства $A_2 x \geqslant b^2$ включаются в функцию Лагранжа. Алгоритмом УИ строится последовательность вариантов x^t, удовлетворяющих условиям $A_1 x \geqslant b^1, x \in X$, в порядке возрастания значений rx^t, где $r = \bar{r} := c - \bar{u}A_2$ при использовании (2б) и $r = \hat{r} := c - \hat{u}A_2$ ($\hat{u}$ – максимизирующий вектор в (17)) при применении оценки лагранжевой релаксации (17). Для нахождения оптимального решения берется схема Б п.3.2.

Поскольку $\tilde{z}_p := \bar{u}b^2 + \min\{\bar{r}x | A_1 x \geqslant b^1,\ x \in X\} \leqslant z_л \leqslant z_p^0$, то перебор надо начинать не с оптимальных решений оценочной задачи (с $\bar{r}x^t = \tilde{z}_p - \bar{u}b^2$), а с тех x^t, для которых $\bar{r}x^t = z_p^0 - \bar{u}b^2$. Отсюда также вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Если среди оптимальных решений (x^t, y^t) задачи (16) при $\upsilon = \bar{\upsilon}$ имеется хотя бы один нормальный вариант, то $z_p^0 = z_л = \tilde{z}_p$.

Описанный выше подход может быть использован при решении прикладных задач ЧЦЛП с неточной информацией, а именно для задач (1) с неточно задаваемыми коэффициентами вектора b. Окончив реализацию метода Бендерса на произвольной итерации k, построим оценочную задачу вида (2б), используя при этом расслоение непрерывной переменной на две и разбиение ограничений на две подсистемы, аналогичное описанному в п. 4.3.3. Генерируя упорядоченную последовательность нормальных вариантов этой задачи, можно было бы получить оптимальное решение (1) по схеме УИ (п. 3.2). Однако для этого требуется перебрать большое число вариантов. Перебор сильно сокращается, если вместо оптимального искать квазиоптимальные решения задачи (1), т.е. оптимальные решения с b', "близкими" к b. Поиск квазиоптимальных решений методом УИ по оценочной задаче, использующей функцию Лагранжа, реализуется с помощью процедуры, описанной в [9] применительно к лагранжевой релаксации. Эта процедура легко переносится и на случай оценочной задачи типа (2б). Процедура [9] позволяет разменивать время вычислений на "точность" квазиоптимального решения: в любой момент можно оборвать вычисления, ограничившись лучшим (по $\delta := \|b - b'\|$) из полученных квазиоптимальным решением. Если же это отклонение b' от b недостаточно мало, целесообразно продолжать процесс вычислений, который, в принципе, при достаточно большом времени решения приводит к получению оптимального решения исходной задачи и в ходе которого минимальное отклонение δ монотонно уменьшается.

5. ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Начальные ограничения для метода Бендерса целесообразно строить специальным образом. Здесь описываются две процедуры для образования таких начальных ограничений, которые, во-первых, задают хорошую начальную оценку и, во-вторых, приводят при совместном построении соответствующих им таблиц УИ к существенному сокращению перебора в методе УИ.

5.1. Первое начальное ограничение. Образующий вектор u^1 этого ограничения находится из условия

$$u^1 \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U} \min_{x \in X} [cx + u(b - Ax)].$$

Пусть $X = \{x^\tau,\ \tau \in \Gamma\}$, $\Delta_\tau := b - Ax^\tau$ и $\mu := \min_{\tau\in\Gamma}\{cx^\tau + u\Delta_\tau\}$.

Тогда поиск u^1 сводится к решению следующей задачи ЛП: $\mu \to \max_{\mu,u}$, $cx^\tau + u\Delta_\tau \geqslant \mu,\ \tau\in\Gamma,\ uB \leqslant r,\ u \geqslant 0$. Двойственная к ней задача имеет вид

$$\sum_{\tau\in\Gamma}(cx^\tau)\upsilon_\tau + ry \to \min,\ \sum_{\tau\in\Gamma}\upsilon_\tau = 1,\ \sum_{\tau\in\Gamma}\Delta_\tau\upsilon_\tau \leqslant By,\ y \geqslant 0,\ \upsilon \geqslant 0. \tag{27}$$

Для ее решения применим принцип генерации столбцов (см. [17]). Пусть (27) решена для некоторого набора столбцов с индексами $\tau\in\Gamma_k\subset\Gamma$ и $(y^{(k)}, \upsilon^{(k)})$ – ее оптимальное решение, а $(u^{(k)}, \mu^{(k)})$ – разрешающие множители. Решив подзадачу

$$(c - u^{(k)}A)x \to \min_{x\in X},$$

найдем ее оптимальное решение x^{τ_k} и оптимальное значение z_k. Если

$$z_k + u^{(k)}b \geqslant \mu^{(k)}, \tag{28}$$

то условия оптимальности выполнены для всех $\tau\in\Gamma$ в задаче (27) и $(y^{(k)}, \upsilon^{(k)})$ – ее оптимальное решение, а $u^1 := u^{(k)}$ – искомый образующий вектор первого начального ограничения.

Если же (28) не выполняется, положим $\Gamma_{k+1} := \Gamma_k \cup \{\tau_k\}$ и перейдем к решению задачи (27) с индексами столбцов $\tau\in\Gamma_{k+1}$.

После построения первого начального ограничения получается оценка

$$z_1 := \min_{x\in X}(cx + u^1(b - Ax)).$$

Если $X = X_0 := \{x \in R^n | 0 \leqslant x \leqslant d,\ x - \text{целочисленный}\}$, $d \in Z^n_+$, то $z_1 = z_{\text{н}}$, где $z_{\text{н}}$ – непрерывная оценка задачи (1). Действительно,

$$z_{\text{н}} = \max_{u\in U}\ \min_{x|0\leqslant x\leqslant d}[cx + u(b - Ax)] = \min_{x|0\leqslant x\leqslant d}[cx + u^1(b - Ax)] = z_1,$$

поскольку минимизация линейной функции по $x \in \{x | 0 \leqslant x \leqslant d\}$ и по $x\in X_0$ приводит к одному и тому же результату.

При произвольном X $z_1 \geqslant z_{\text{н}}$. Если в определение множества X входит одно или несколько линейных ограничений, матрица которых не является унимодулярной, то в невырожденном случае $z_{\text{н}} < z_1$.

5.2. Построение s-го начального ограничения. Пусть уже построено $s - 1$ ограничение с образующими векторами $u^1,\dots, u^{s-1}$, $s \geqslant 2$. На итерации s будем искать вектор u^s, оптимальный для задачи

$$\varphi_{s-1}(u) := \min_{\tau\in\Gamma}\left[cx^\tau + \max\left\{\max_{t\in T_{s-1}}\{u^t\Delta_\tau\},\ u\Delta_\tau\right\}\right] \to \max_{u\in U}, \tag{29}$$

где $T_{s-1} = \{1,\dots,s-1\}$. Обозначим $d_{\tau s} := \max_{t\in T_{s-1}}\{u^t\Delta_\tau\}$. Оценка $\varphi_{s-1}(u^{s-1})$ равна оптимальному значению задачи

$$\Psi_{s-1}(x) := cx + \max_{t\in T_{s-1}}\{u^t(b - Ax)\} \to \min_{x\in X}. \tag{30}$$

Пусть $\{x^\tau,\ \tau\in\bar\Gamma_s\}$ – множество оптимальных решений задачи (30), а ψ_{s1} – ее оптимальное значение. Решая задачу (29), оценку $\varphi_{s-1}(u^{s-1})$ можно увеличить только в случае, когда существует такое $u\in U$, что $u\Delta_\tau > d_{\tau s}\ \forall\tau\in\bar\Gamma_s$.

Для решения задачи (29) применим следующую многошаговую процедуру. На первом шаге будем увеличивать $\varphi_{s-1}(u)$ за счет возрастания величин, стоящих в фигурных скобках в (20), для $\tau \in \overline{\Gamma}_s$. Это возможно только до тех пор, пока $\varphi_{s-1}(u) < \min\limits_{\tau \in \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_s} \psi_{s-1}(x^\tau)$. Поэтому для дальнейшего увеличения оценки надо найти допустимые решения x^τ задачи (30), минимизирующие $\varphi_{s-1}(x^\tau)$ по $\tau \in \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_s$ и т.д. Для реализации данной процедуры надо строить последовательность допустимых решений x^τ задачи (30), упорядоченных по возрастанию $\Psi_{s-1}(x^\tau)$. Такой алгоритм УИ для эквивалентной (30) задачи $\min\{cx + \nu | (u^t A)x + \nu \geqslant u^t b,\ t \in T_{s-1};\ x \in X,\ \nu \geqslant 0\}$ описан в п. 3.5.

Таким образом, на каждом шаге p множество Γ_p, $p = 1,\dots$, $\Gamma_1 := \overline{\Gamma}_p$, пополняется индексами очередных вариантов x^τ, имеющих одинаковые значения $\varphi_{s-1}(x^\tau)$, которые генерируются алгоритмом УИ. Пусть $\psi_{s1},\dots,\psi_{sp}$, $\psi_{sl} < \psi_{s,l+1}$ – значения целевой функции $\Psi_{s-1}(x)$, соответствующие генерируемым на шагах $l = 1,\dots, p$ вариантам x^τ упорядоченной последовательности. Тогда $\Gamma_p := \{\tau | \psi_{s-1}(x^\tau) \leqslant \psi_{sp}\}$. На шаге p решается задача ЛП

$$\mu \to \max,\ cx^\tau + u\Delta_\tau \geqslant \mu,\ u\Delta_\tau \geqslant d_{\tau s},\ \tau \in \Gamma_p,\ uB \leqslant r,\ u \geqslant 0. \tag{31}$$

Для нее не обязательно искать оптимальное решение – требуется найти ее допустимое решение, для которого $\mu = \psi_{s,p+1}$ (величина $\psi_{s,p+1}$ определяется по таблице УИ без вычисления соответствующих ей вариантов x^τ). Если такое решение существует, то по алгоритму УИ находятся все x^τ с $\psi_{s-1}(x^\tau) = \psi_{s,p+1}$ и осуществляется переход к новому шагу, на котором решается задача вида (31) с Γ_{p+1} вместо Γ_p. Если же для оптимального решения $(u^{(p)}, \mu^{(p)})$ задачи (31) $\mu^{(p)} \leqslant \psi_{s,p+1}$, то найденный вектор $u^{(p)}$ является искомым: $u^s := u^{(p)}$. (В частности, возможна ситуация, когда после добавления неравенств $u\Delta_\tau \geqslant d_{\tau s}$, $\tau \in \Gamma_p \setminus \Gamma_{p-1}$, не удается увеличить оценку и $\mu^{(p)} = \psi_{sp}$.) На этом итерация s заканчивается и строится s-е начальное ограничение вида (4) с образующим вектором u^s. При этом те из построенных вариантов x^τ, $\tau \in \Gamma_p$, для которых $cx^\tau + u^{(p)}\Delta_\tau = \mu^{(p)}$, образуют множество $\overline{\Gamma}_{s+1}$, являющееся начальным для проведения следующей итерации.

Очевидно, $\psi_{s,p+1} = \psi_{s+1,1}$, так что весь процесс построения начальных ограничений реализуется с помощью единого алгоритма УИ, который при переходе к новой итерации продолжается точно с того места, на котором он оборвался на предыдущей.

Следует заметить, что вместо решения последовательности задач вида (31) с расширяющимися множествами Γ_p индексов ограничений удобнее решать двойственные к (31) задачи, в которых происходит пошаговое пополнение множества векторов ограничений.

При решении двойственных к (31) задач имеется возможность, как и в п. 5.1, использовать принцип генерации столбцов, а не вычислять их все (для $\tau \in \Gamma_p \setminus \Gamma_{p-1}$) предварительно на каждом шаге. Такую возможность целесообразно использовать только для $s = 2$; при $s \geqslant 3$ возникающие на каждой итерации симплексного метода подзадачи, служащие для построения очередного столбца, слишком сложны.

Образующие векторы, вычисляемые в п. 5.1, 5.2, как правило, не являются вершинами U, и, следовательно, строящиеся по ним неравенства можно рассматривать как выпуклые линейные комбинации отсечений Бендерса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benders J.F.* Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems // Numer. Mathem. 1982. V. 4.
2. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1979.
3. *Лебедев С.С.* Комбинаторные методы дискретного программирования // Математическое программирование (Всесоюзная летняя школа по мат. программированию. Алма-Ата, 1968). Вып. 5. Алма-Ата, 1969.
4. *Лебедев С.С.* Метод упорядоченного перебора целочисленного программирования. Труды I зимней школы по мат. программированию. Вып. 3. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1969.
5. *Shapiro J.* Mathematic Programming: Structures and Algorithms. N.Y.; Toronto, 1979.
6. *Лебедев С.С.* Целочисленное программирование и множители Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1974. Т. X. Вып. 3.
7. *Juignard M., Kim S.* Lagrangean Decomposition: a Model Yielding Stronger Lagrangean Bounds // Math. Programming. 1987. V. 39. N 2.
8. *Glover F., Klingman D.* Layering Strategies for Creating Exploitable Structure in Linear and Integer Programs // Math. Programming. 1988. V. 40. N 2.
9. *Лебедев С.С.* Квазиоптимальные решения задачи целочисленного программирования // Задачи дискретной оптимизации и методы их решения. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1987.
10. *Лебедев С.С.* Задачи целочисленного программирования с неточно заданными коэффициентами // Экономико-математическое моделирование и анализ дискретных систем. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1989.
11. *Kelley J.E.* The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1960. V. 8. N 4.
12. *Lemarechal C., Nemirovskii A., Nesterov Yu.* New Variants of Bundle Methods // Report de Recherche N 1508. Paris: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. 1991.
13. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
14. *Емеличев В.А., Комлик В.И.* Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука, 1981.
15. *Фридман А.А.* Метод упорядоченного перебора целочисленного программирования // Экономика и мат. методы. 1974. Т. X. Вып. 5.
16. *Алексеев О.Г.* Применение способа встречного решения для повышения эффективности метода динамического программирования // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1968. № 3.
17. *Канторович Л.В., Романовский И.В.* Генерирование столбцов в симплекс-методе // Экономика и мат. методы. 1985. Т. XXI. Вып. 1.
18. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979.

Поступила в редакцию
4 XII 1992