МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ОБОБЩЕННЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ВЗВЕШЕННОМ ПОКРЫТИИ 0,1-МАТРИЦЫ

© 1994 Герман О.В.

(Минск)

Описанный в [1] статистически оптимальный алгоритм для задачи о покрытии распространяется на еще более общий случай, когда переменные входят в целевую функцию с произвольными неотрицательными коэффициентами. Алгоритм позволяет получить оптимальное решение подавляющего большинства задач, причем доля точно решенных может быть повышена за счет увеличения числа итераций.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] предложен статистически оптимальный алгоритм для отыскания минимального покрытия 0,1-матрицы (случай невзвешенной матрицы). Алгоритм основан на итеративном добавлении к матрице новых столбцов (называемых столбцами-резольвентами или столбцами-отсечениями), которые строятся согласно сформулированному авторами принципу групповых резолюций (ПГР). Они обладают следующим свойством. В предположении, что еще не получено оптимальное покрытие, каждое такое покрытие содержит как минимум одну строку из числа тех, которые покрывают столбец-резольвенту. После добавления каждого нового столбца, рассматриваемого как случайный 0,1-вектор, производится аналитическая оценка математического ожидания числа минимальных покрытий с заданным количеством строк (размером). По результатам оценки делается вывод о необходимости продолжения итераций или прекращения алгоритма. Данная оценка базируется на правиле "Kσ", $K \geq 3$, устанавливающим вероятность попадания случайной величины с биномиальным законом распределения в интервал $\mu_x \pm K\sigma$ (где μ_x – математическое ожидание; σ – среднеквадратическое отклонение), близкой к единице. Увеличение коэффициента при σ асимптотически приближает указанную вероятность к единице (в последней версии алгоритма мы используем $K = 12$, чему соответствует значение указанной вероятности порядка 0,999). Таким образом, в подавляющем большинстве случаев алгоритм завершает работу отысканием точного решения задачи, что позволяет считать его статистически оптимальным.

Установлено, что сложность алгоритма [1] ограничена сверху величиной $O(nmp / \sqrt{1-p})$, где $n(m)$ – число строк (столбцов) в матрице; p – плотность (частота) единичных элементов в матрице, $0 < p < 1$. Эта оценка сложности получена для $K = 3$ (повышение точности алгоритма регулируется надлежащим увеличением числа итераций, о чем подробнее сказано далее). Алгоритм проверен для 600 случайно сгенерированных задач с последующим сравнением с точным решением (методика экспериментов дана в заключении). Некоторые важные результаты таковы: Для

40 × 40-матрицы из 200 задач точно решены 192; для 100 × 150-матриц из 400 задач точно решены все задачи. Можно сделать вывод, что аналитические оценки [1] для математического ожидания числа покрытий с заданным размером устойчивы для матриц большой размерности. Напротив, с уменьшением числа столбцов эти оценки менее устойчивы. Несомненное, на наш взгляд, достоинство метода – его высокое быстродействие. Время решения всех 600 задач – 0,4 – 10 с (на одну задачу). Так была найдена задача размером 60 × 60 и $p = 0,1$, на которой метод ветвей и границ (МВГ) [2, 3] "работал" в течение 3 ч, на *IBM PC AT/386* и нашел за указанное время наилучшее покрытие с 14 строками, в то время как статистически оптимальный алгоритм за 4 с дал покрытие с 13 строками. Обнаружено, что поведение МВГ нестабильно, особенно начиная с матриц 60 × 60 и $p \in 0,1 \div 0,3$, так что возможны "непредсказуемые провалы" типа отмеченного выше, чередующиеся с сравнительно быстро (1,5 ÷ 5 мин) решаемыми задачами. Не лучшее "поведение" в этом смысле демонстрируют иные точные алгоритмы, например метод Джеффриона [4], который также одну из задач размером 60 × 60 "считал" в течение 1 ч 40 мин по программе, приведенной в [4].

Таким образом, точные методы едва ли можно считать практически удовлетворительными, например, для матриц порядка 500 × 500, что является доводом в пользу статистического подхода.

Настоящая работа содержит статистический подход к решению задачи о минимальном взвешенном покрытии (ЗМВП), развивающий идеи [1].

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Пусть $B_{n,m}$ – 0,1-матрица без нулевых столбцов и строк, состоящих из одних единиц. Полагаем, что $B_{n,m}$ не содержит одинаковых столбцов. Для каждой строки β известен ее вес C_β (будем считать его целым неотрицательным числом).

Говорят, что строка β покрывает столбец α , если $V(\beta, \alpha) = 1$, где $V(\beta, \alpha)$ – элемент матрицы $B_{n,m}$, расположенной на пересечении строки β и столбца α . Множество строк π есть покрытие для $B_{n,m}$, если каждый столбец из $B_{n,m}$ покрывается хотя бы одной строкой из π . Покрытие π избыточное, если из него нельзя удалить ни одной строки без потери свойства покрытия. Покрытие π называется минимальным взвешенным покрытием, если оно доставляет минимум суммы $\sum_{\beta \in \pi} C_\beta$ среди всех избыточных

покрытий матрицы $B_{n,m}$.

Нас интересует следующая задача: для $B_{n,m}$ и заданных весов строк найти минимальное взвешенное покрытие.

3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПГР ДЛЯ ЗМВП

Определение 1. Пусть дано избыточное покрытие $\pi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$. Любой единичный элемент $V(\beta_i, \alpha)$ в строке $\beta_i \in \pi$ и столбце α , таком, что для любой другой строки $\beta_j \in \pi$, $\beta_i \neq \beta_j$, $V(\beta_j, \alpha) = 0$ назовем *синдромным элементом* покрытия π . Столбец, содержащий синдромный элемент, назовем *синдромным столбцом*.

Определение 2. Столбец α_r называется *избыточным*, если в матрице найдется другой столбец α_s , такой, что любая строка, содержащая в α_s "1", также содержит "1" в α_r . Нетрудно видеть, что избыточные столбцы можно удалить из матрицы без потери решения ЗМВП.

Пусть π – некоторое избыточное взвешенное покрытие (получаемое любым достаточно хорошим эвристическим алгоритмом [5, 6]; в частности, мы опишем далее "жадный" алгоритм для ЗМВП). Так, для матрицы на рис. 1 имеем: $\pi = \{\beta_2, \beta_3, \beta_6, \beta_7,$

Век	C	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}
6	β_1	1						1		1					1		
2	β_2			1			1										
4	β_3				1				1							1	
10	β_4		1									1					1
8	β_5					1										1	
3	β_6								1								1
3	β_7																
7	β_8		1														
6	β_9																
5	β_{10}																
8	β_{11}																
4	β_{12}																

Рис. 1

	α_4	α_9	α_{10}	α_{12}	α_{15}	Вес
β_1						6
β_2			1			2
β_3	1					4
β_4			1	1	1	10
β_5	1					8
β_6					1	3
β_7		1				3
β_8			1			7
β_9				1		6
β_{10}	1	1			1	5
β_{11}		1		1		8
β_{12}						4

Рис. 2

β_9 с весом $C_\pi = 18$. Найдем для этого покрытия множество синдромных столбцов: $\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}\}$. В найденном множестве выберем число столбцов, равное размеру покрытия π (в данном примере – 5). Итак, выберем 5 столбцов, причем такие, что они не содержат двух или более синдромных элементов покрытия π в одной какой-либо строке из π . Это всегда можно сделать, так как π избыточно. Выберем, например, столбцы $\{\alpha_4, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{15}\}$ и построим на них подматрицу исходной матрицы (рис. 2). В полученной подматрице выделим два непересекающихся множества строк: SR_π^I и SR_π^{II} ; каждая строка из SR_π^I содержит не более одной единицы в полученной подматрице; каждая строка из SR_π^{II} содержит более одной единицы. Имеем: $SR_\pi^{II} = \{\beta_4, \beta_{10}, \beta_{11}\}$, $SR_\pi^I = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{12}\}$.

Приведем теперь следующие ключевые рассуждения. Допустим, что ни одно оптимальное решение не содержит ни одной строки из SR_π^{II} . При этом определим в множестве SR_π^I 5 (опять же по числу строк в π) непересекающихся подмножеств строк, таких, что первое подмножество покрывает столбец α_4 , второе – α_9 , третье – α_{10} , четвертое – α_{12} и пятое – α_{15} (каждая строка в S_{α_j} покрывает столбец α_j). Получаем следующее разбиение $S_{\alpha_4} = \{\beta_3, \beta_5\}$, $S_{\alpha_9} = \{\beta_7\}$, $S_{\alpha_{10}} = \{\beta_2, \beta_8\}$, $S_{\alpha_{12}} = \{\beta_9\}$, $S_{\alpha_{15}} = \{\beta_6\}$. Теперь ясно, что если существует покрытие меньшей стоимости, чем $\pi = \{\beta_2, \beta_3, \beta_6, \beta_7, \beta_9\}$, то его стоимость (вес) ограничена снизу величиной $C = \min\{C_{\beta_3}, C_{\beta_5}\} + \min\{C_{\beta_7}\} + \min\{C_{\beta_2}, C_{\beta_8}\} + \min\{C_{\beta_9}\} + \min\{C_{\beta_6}\} = 4 + 3 + 2 + 6 + 3 = 18$. Назовем $\hat{C}$ текущей нижней границей ЗМВП.

Теорема 1. Если стоимость найденного покрытия π меньше текущей нижней границы ЗМВП или равна ей, то в предположении, что π неоптимально, каждое оптимальное покрытие содержит как минимум одну строку из SR_π^{II} .

Указанная формулировка не является избыточной и сохраняет силу для следующего обобщения и усиления теоремы 1.

Теорема 1 – это формулировка ПГР для ЗМВП. Более строго, пусть столбцы $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_z}\}$ образуют подматрицу, на которой определяется множество строк SR_π^{II} . Построим столбец α^* , содержащий "1" в строках, включенных в SR_π^{II} , "0" – в остальных. Тогда α^* , по определению, резольвента столбцов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}$. Термин

"резольвента" употреблен здесь в следующем смысле: любое оптимальное покрытие матрицы $B_{n,m}$ при условиях, указанных в теореме 1, содержит как минимум одну строку в множестве SR_{π}^{Π} , определяемом на основании столбцов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_z\}$.

Остается сделать последний шаг для случая, когда условия теоремы 1 не выполняются, а именно, стоимость найденного покрытия превосходит $\hat{C}$. Здесь нужно исключить некоторые строки из разбиения $\langle S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_r} \rangle$ и включить их в SR_{π}^{Π} с тем, чтобы значение $\hat{C}$ возросло и стало не меньше стоимости покрытия π . Мы предлагаем следующий способ. Найдем строки p с минимальными весами из каждого множества $S_{\alpha_i}, S_{\alpha_j}, \dots, S_{\alpha_r}$. Из p удалим строки, принадлежащие π . Найдем в p такую строку, перевод которой в SR_{π}^{Π} максимально увеличивает $\hat{C}$. Данную строку выведем из SR_{π}^{Π} и включим в SR_{π}^{Π} . Если требуется, повторим эту схему еще раз.

Столбец-резольвента, очевидно, исключает какие-то избыточные покрытия из пространства решений, поэтому мы называем его также отсекающим столбцом. Теорема 1 имеет следующую более сильную формулировку.

Теорема 1* (усиленная форма). Пусть π – текущее избыточное покрытие и π^* – наилучшее из уже найденных покрытий. Если стоимость π^* меньше либо равна величине $\hat{C}$, вычисляемой для π , то в предположении, что π^* неоптимально, каждое оптимальное покрытие содержит как минимум одну строку из множества SR_{π}^{Π} , определенного на синдромных столбцах текущего покрытия π .

Доказательство теорем 1 и 1*. Проведем его от противного. Положим, что ни одна строка из SR_{π}^{Π} не входит в лучшее покрытие. Нетрудно сообразить, что тогда любое избыточное покрытие будет иметь вес, по крайней мере не меньший величины $\hat{C}$ (т.е. и для оптимального покрытия $\pi^{opt}, C_{\pi^{opt}} \geq \hat{C}$). Так как по условию теоремы $C_{\pi^{opt}} < \hat{C}$, то немедленно получаем противоречие.

Следующая теорема устанавливает, что мы гарантированно добавим как минимум один отсекающий столбец, который не может быть удален как избыточный.

Теорема 2. Если для генерации отсекающего столбца α^* выбраны синдромные столбцы $A = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_z}\}$ так, что ни одна строка из покрытия π не содержит более одной единицы в столбцах $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_z}\}$ и каждый столбец из A покрывает одна строка из π , то α^* не может быть исключен из $B_{n,m}$ как избыточный столбец.

Доказательство теоремы 2, как и следующей, опущено.

Теорема 3. Найденное избыточное покрытие π будет решением данной ЗМВП, если $SR_{\pi}^{\Pi} = \emptyset$.

Теорема 2 устанавливает конечность (сходимость) ПГР. Теорема 1* может быть обобщена следующим образом (цель – получение более эффективных столбцов-отсечений) для произвольной подматрицы $B'_{n,t}$. Пусть $\hat{C}(B'_{n,t})$ – текущая нижняя граница ЗМВП, вычисленная на $B'_{n,t}$, и C_{π^*} – стоимость (вес) наилучшего из найденных покрытий. Смысл обозначений $SR_{\pi}^I(B'_{n,t})$ и $SR_{\pi}^{\Pi}(B'_{n,t})$ сохранен применительно к подматрице $B'_{n,t}$. Тогда, если $\hat{C}(B'_{n,t}) \geq C_{\pi^*}$, то из предложения о неоптимальности π^* заключаем, что как минимум одна строка из $SR_{\pi}^{\Pi}(B'_{n,t})$ входит в лучшее решение. Это обобщение позволяет находить более эффективные отсекающие и доказывается из тех же соображений, что и теорема 1* (1).

	α_2	α_4	α_9	α_{10}	Вес
β_1					6
β_2	1	1		1	2
β_3					4
β_4	1			1	10
β_5		1			8
β_6					3
β_7			1		3
β_8				1	7
β_9	1				6
β_{10}			1		5
β_{11}			1		8
β_{12}	1				4

Рис. 3

В качестве иллюстрации рассмотрим подматрицу на рис. 3, выбранную из исходной матрицы на рис. 1. Для нее $\hat{C} = 6 + 4 + 3 + 7 = 20$. Так как ранее найдено покрытие с весом $18 < 20$, то находим $SR_{\pi}^{II} = \{\beta_2, \beta_4\}$.

Итак, ПГР для ЗМВП последовательно определен.

4. ОПИСАНИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ МЕТОДА

Наш метод реализован как итерационная процедура, которая на каждой итерации определяет неизбыточное покрытие матрицы $B_{n,m}$ на основе достаточно хорошего эвристического алгоритма и строит новый столбец-отсечение на базе найденного покрытия. Если этот столбец – нулевой, то алгоритм детерминированно завершается отысканием точного решения ЗМВП (согласно теореме 3), иначе выполняется оценка математического ожидания числа (μ^*) взвешенных минимальных покрытий меньшей стоимости. Если эта оценка попадает в доверительный интервал, определяемый по правилу "К σ ", $K \geq 3$, то итерации заканчиваются, в противном случае – продолжаются. Число итерации по теореме 2 гарантированно конечно.

Приведенная общая схема может быть объяснена с эвристических и формальных сторон.

1). **Объяснение с эвристических позиций.** Пусть некий эвристический алгоритм доставляет точное решение задачи при однократном выполнении с вероятностью r ; q – допустимая вероятность потери решения. Тогда число итераций N с отсечением получаемых промежуточных решений оценивается из соотношения $(1 - r)^N \leq q$, откуда $N \geq \ln q / \ln((1 - r)) \approx (1 - q)/r$. Например, для $q = 0,01$, $r = 0,01$, $N = 100$. Заметим, что на оценку N не влияет (во всяком случае, очевидным образом) размерность задачи. Кроме того, здесь игнорируется тот факт, что выполнение отсечений сужает область поиска и вероятность r перманентно растет.

2). **Объяснение формальное.** Приводимые вероятностные оценки для μ^* получены для метода [1], в котором реализован алгоритм "жадного" поиска, и эти оценки формально обоснованы. Должно быть ясно, что число итераций алгоритма зависит от реализуемого для получения неизбыточных покрытий эвристического алгоритма. Поэтому возможны иные сложностные оценки для алгоритмов, отличных от "жадного". Как перенести "жадную" стратегию на случай взвешенной задачи о минимальном покрытии, объясняется в разд. 6. Таким образом, мы сохраняем преемственность полученных в [1] оценок для ЗМВП.

Отметим, что методика [1] в случае ЗМВП прямо не проходит, поэтому мы показываем далее, как взвешенная задача о покрытии может быть сведена к невзвешенному случаю, что позволяет использовать уже разработанную методику. Предварительно мы даем необходимый технический результат.

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАДАЧЕЙ О МАКСИМАЛЬНОЙ КЛИКЕ В ГРАФЕ (ГИПЕРГРАФЕ) И ЗАДАЧЕЙ О МИНИМАЛЬНОМ ПОКРЫТИИ (ЗМП) 0,1-МАТРИЦЫ

Пусть $D_{n,n}$ – симметричная относительно нулевой главной диагонали 0,1-матрица размером $n \times n$. Через Z обозначим множество строк (и одноименных столбцов) матрицы $D_{n,n}$, которые образуют некоторую нулевую подматрицу матрицы $D_{n,n}$; Z^* – максимальное по числу элементов множество Z для $D_{n,n}$. Нетрудно видеть, что Z^* представляет максимальную клику при интерпретации матрицы $D_{n,n}$ как матрицы инцидентности некоторого графа [7].

Задача о максимальной клике (ЗМК) формулируется как отыскание Z^* для $D_{n,n}$. Сначала покажем, как эффективно свести ЗМК и ЗМП.

Пусть дана матрица $D_{n,n}$ (рис. 4). Составим 0,1-матрицу $C_{n,m}$ с элементами $C(k, i) = C(j, i) = 1$, если и только если $D(k, j) = 1$. Отметим, что номер столбца i никак не связан с элементом $D(k, j)$, а определяется для порядкового номера этого элемента в матрице (из двух симметричных единичных элементов учитывается только один, поэтому число столбцов в $C_{n,m}$ равно половине от числа единиц в $D_{n,n}$). Матрица $C_{n,m}$, соответствующая $D_{n,n}$ на рис. 4а, показана на рис. 4б.

Назовем матрицу $C_{n,m}$ двойственной к $D_{n,n}$.

Теорема 4 [7]. Пусть $\pi^* = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ – минимальное покрытие двойственной матрицы $C_{n,m}$ и Rows – множество всех строк (столбцов) матрицы $D_{n,n}$. Тогда

$$Z^* = \text{Rows} \setminus \pi^*, \tag{1}$$

где $\setminus$ – теоретико-множественная разность.

Для нас крайне важно обобщение теоремы 4.

Пусть $B_{n,m}$ – произвольная матрица для ЗМП. Пусть столбец α покрывается строками $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Тогда столбец α связывается (сопоставляется) с дизъюнктом: $D_\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_k$, который обозначим как $D_\alpha^\# = \#(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k)$, интерпретируя символ $\#$ отношением несовместности (операцией Шеффера). Теперь множество Z^* , определяемое для системы дизъюнктов $\bar{D} = \{D_j^\#, j = 1, \dots, m\}$, интерпретируется как максимальное по числу элементов множество строк $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_r$, никакое подмножество которых не является несовместным. Ясно, что если $\beta_i \in Z^*$, то $\beta_i \in \pi^*$ для двойственной матрицы, и наоборот.

Таким образом, Z^* для этого общего случая – максимальная клика в гиперграфе [8], ребра которого связывают вершины $\bar{\beta}_i$ из дизъюнктов $D_j^\#$.

Соотношение (1) верно, очевидно, и для случая гиперграфа (что, впрочем, легко доказать). Теперь – основной шаг в наших выкладках, который поясняется на следующем примере.

Пусть дан дизъюнкт: $D_j^\# = \#(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3)$ ($D_j = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$), причем вес строки β_1 равен 2; строки β_2 – 3; строки β_3 – 1. Заменим $D_j^\#$ множеством его копий, причем введем две копии строки β_1 (β_1^1 и β_1^2) по весу β_1 ; 3 копии β_2 ($\beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3$) по весу β_2 и т.д.

$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$	$\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_5$	$\bar{\beta}_6$	$\bar{\beta}_7$
$\bar{\beta}_1$	1	1	1	1	1	1
$\bar{\beta}_2$	1	1	1	1	1	1
$\bar{\beta}_3$	1	1	1	1	1	1
$D_{7,7} = \bar{\beta}_4$	1	1	1	1	1	1
$\bar{\beta}_5$	1	1	1	1	1	1
$\bar{\beta}_6$	1	1	1	1	1	1
$\bar{\beta}_7$	1	1	1	1	1	1

a)

β_1	1	2	3	4	5	6	7	8
β_2	1	1	1	1	1	1	1	1
β_3	1	1	1	1	1	1	1	1
$D_{7,8} = \beta_4$	1	1	1	1	1	1	1	1
β_5	1	1	1	1	1	1	1	1
β_6	1	1	1	1	1	1	1	1
β_7	1	1	1	1	1	1	1	1

б)

Рис. 4

Получаем следующее множество дизъюнктов

$$D_j^{1\#} = \#(\bar{\beta}_1^1, \bar{\beta}_2^1, \bar{\beta}_3^1), \quad D_j^{4\#} = (\bar{\beta}_1^2, \bar{\beta}_2^1, \bar{\beta}_3^1),$$

$$D_j^{2\#} = \#(\bar{\beta}_1^1, \bar{\beta}_2^2, \bar{\beta}_3^1), \quad D_j^{5\#} = (\bar{\beta}_1^2, \bar{\beta}_2^2, \bar{\beta}_3^1),$$

$$D_j^{3\#} = \#(\bar{\beta}_1^1, \bar{\beta}_2^3, \bar{\beta}_3^1), \quad D_j^{6\#} = \#(\bar{\beta}_1^2, \bar{\beta}_2^3, \bar{\beta}_3^1).$$

Назовем указанное преобразование трансформацией к невзвешенному случаю ЗМК (ТНЗМК): трансформация состоит в порождении копий дизъюнктов $D_j^\#$. Далее систему дизъюнктов, получаемых на основе ТНЗМК, заменяем двойственной матрицей для задачи ЗМП.

6. СВЕДЕНИЕ ЗМВП К ЗМП

Пусть $B_{n,n}$ – матрица для ЗМВП и $C_1, \dots, C_n$ – веса строк. На основе техники ТНЗМК "строим" новую матрицу, в которой веса строк одинаковы и равны единице. В этой новой матрице будет равно $(C_1 + \dots + C_n)$ строк. Ее столбцы получаются из копий дизъюнктов $D_j^\#$, построенных на основе ТНЗМК, как описано ранее, т.е. если $D_j^\# = \#(\bar{\beta}_i, \bar{\beta}_j, \bar{\beta}_k)$, то этому дизъюнкту соответствует столбец с единицами в строках $\beta_i, \beta_j, \beta_k$, и т.п. Теперь ясно, что если в минимальном покрытии новой матрицы ровно k строк, то вес оптимального покрытия для соответствующей ЗМВП равен k . На рис. 5 в качестве пояснения показан переход от взвешенной матрицы ЗМВП (рис. 5а) к невзвешенной (рис. 5б) согласно рассмотренной технике.

с использованием логарифмирования (3) и формулы Стирлинга. Если взять за основу (3'), то правую часть неравенства (4) нужно заменить на

$$0,91 + \ln \left(\frac{K^2 + 2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2 + 2}{2} \right) - 1} \right)$$

(т.е. K регулирует число итераций ПГР).

Ясно, что можно использовать (4), чтобы завершить поиск покрытия с весом, меньшим либо равным k , если вычислить ε_k . Из (2) следует, что необходимо знать число столбцов в матрице, полученной на основе ТНЗМК. Теперь видно, что для каждого исходного столбца D_j с единицами в строках $\beta_1, \dots, \beta_z$ мы вводим число столбцов $v_j = C_{\beta_1} \times \dots \times C_{\beta_z}$ с общим числом единиц, равным $v_j |D_j|$, где $|D_j|$ — число единиц в столбце D_j матрицы $B_{n,m}$, а C_{β_i} — вес строки β_i . Таким образом, нетрудно найти величину p для вычисления ε_k из (2) на основе указанных количественных соотношений.

Далее, формальный переход к эквивалентной невзвешенной задаче о покрытии позволяет указать "жадный" алгоритм для ЗМВП. Напомним, что его схема в случае ЗМП предписывает последовательно вводить в покрытие строки с максимальным числом единиц, после чего сокращать матрицу, удаляя покрываемые этими строками столбцы. Для реализации такой стратегии для ЗМВП необходимо уметь вычислять число единиц в строках эквивалентной невзвешенной матрицы, получаемой согласно техники ТНЗМК.

Для иллюстрации обратимся к рис. 5. Нетрудно видеть, что число единиц $E_i^!$ в строке $\beta_i^!$ эквивалентной невзвешенной матрицы определяется из выражения

$$E_i^! = \sum_{\alpha} \prod_{\beta_k \in D_{\alpha}} C_{\beta_k}, \quad (5)$$

где суммирование проводится по всем столбцам α взвешенной матрицы так, что строка β_i покрывает α ; под знаком произведения указываются веса всех строк (за исключением β_i), покрывающих столбец α .

Теперь окончательно формализуем принцип "жадного" алгоритма для ЗМВП. Выбираем на каждом шаге для включения в искомое неизбыточное покрытие строку, доставляющую максимум оценки (5).

На этом формальные выкладки завершены.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде всего, уточним сложностную оценку из [1] для невзвешенного случая с учетом (3'). Используя (3'), выразим m

$$\ln C_n^k + m \ln(1 - \varepsilon_k) \leq \ln \left(\frac{K^2 + 2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2 + 2}{2} \right)^2 - 1} \right).$$

С учетом того, что $\ln C_n^k \leq n$ и $\ln(1 - \varepsilon_k) \leq -\varepsilon_k$, получаем

$$m \approx \frac{n - \ln \left(\frac{K^2 + 2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2 + 2}{2} \right)^2 - 1} \right)}{\varepsilon_k}.$$

Таким образом, при условии, что в добавляемых столбцах-резольвентах частота единичных элементов остается в среднем такой же, как и в статистически усредненном столбце исходной матрицы (это подтверждается на большом экспериментальном материале), найдем

$$m \approx n - \ln \left(\frac{K^2 + 2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2 + 2}{2} \right)^2 - 1} \right) / \sqrt{1-p}.$$

Отсюда число итераций N учитывает коэффициент в правиле "Кσ" следующим образом (для невзвешенной задачи о покрытии)

$$N = 0 \left[\frac{mp \left(n - \ln \left(\frac{K^2 + 2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2 + 2}{2} \right)^2 - 1} \right) \right)}{\sqrt{1-p}} \right]. \quad (6)$$

Переноса полученный результат на ЗМВП, заключаем, что сходимость теоретически ухудшается, так как в (6) растут m и n для ЗМВП, однако общий вид сложности оценки для числа N итераций такой же, как и в невзвешенном случае, поскольку рассуждения проведены с учетом эквивалентного сведения ЗМВП к ЗМП. На практике мы не обнаружили серьезного увеличения числа итераций с ростом размеров матрицы, например, среднее время работы с матрицами размером 100×150 составило $4 \div 10$ с на *IBM PC/AT 386*, в то время как с матрицами $40 \times 40 - 0,2 \div 1$ с. Следует отметить, что приведенная оценка сложности теоретически завышена, поскольку не учитывает ранее указанного факта, что по мере добавления столбцов-резольвент вероятность получения оптимального решения при повторной итерации перманентно возрастает. Сходимость (быстродействие) статистически-оптимального алгоритма чувствительна к величине p . Однако, если исключить экстремальные случаи, алгоритм ведет себя достаточно равномерно в широком диапазоне задач.

Последнее замечание касается методики проведения экспериментов для практической апробации метода. Для матриц размером 40×40 сравнение выполнялось с решениями, доставляемыми точными методами, так как время их работы укладывалось для таких задач в диапазоне $1,5 \div 7$ мин. Для матриц размером 100×150 точные алгоритмы безнадежно "висели", поэтому методика эксперимента базировалась на теореме 3. Действительно, чтобы зафиксировать некоторый набор строк π^* в качестве оптимального покрытия достаточно: 1) искусственно сгенерировать для π^* множество синдромных столбцов, для которых $SR_{\pi^*}^{\Pi} = \phi$ (согласно теоремам 1*, 3); 2) случайным образом генерировать остальные столбцы, обеспечивая лишь их покрытие π .

Следует, однако, отметить, что статистически оптимальный алгоритм дал указанные во введении результаты на матрицах 100×150 , для которых вероятность наличия в $B_{n,m}$ минимального покрытия размером k была на порядок и более выше вероятности потери решения (последняя $\sim 0,001$). Это обстоятельство следует считать "типичным" на практике (т.е. с вероятностью, близкой к единице, оно имеет место для среднестатистической матрицы).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герман О.В., Найдено В.Г.* Статистически оптимальный алгоритм для задачи о минимальном покрытии // Экономика и мат. методы. 1993. Т. 29. Вып. 4.
2. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. М.: Наука, 1987.
3. *Кофман А.А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование. М.: Мир, 1972.
4. *Балашевич В.А.* Алгоритмизация математических методов планирования. Минск: Вышэйш. шк., 1978.
5. *Ковалев М.М.* Дискретная оптимизация. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977.
6. *Чернышев Ю.Ю.* Методы оптимизации комбинаторных устройств. М.: Сов. радио, 1977.
7. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1982.
8. *Зыков А.А.* Основы теории графов. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
9 XI 1993