ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1995 Том 31, вып.1

ОПТИМИЗАЦИЯ И ГЛОБАЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЭКОНОМИК

© 1995 Медницкий В.Г.

(*Москва*)

Исследуются типы оптимальных состояний экономики с технологией, допускающей описание с помощью леонтьевской модели. Получены необходимые и достаточные условия экономической эффективности объединения таких экономик в систему общего рынка.

В [1] показано, что попытка управлять экономикой с помощью планов производства, ориентированных на некоторый принцип экономической эффективности и удовлетворение общественных потребностей при известных возможностях предприятий, должна была поставить планирующую систему перед следующей дилеммой. Производить продукцию в заданных объемах и ассортименте за наименьшее время, но при наихудших значениях построенных по любой методике экономических показателей (например, при самом высоком возможном для данной технологии уровне затрат), или перейти к улучшению экономических показателей (скажем, минимизации затрат) при наличии временнóго резерва? В обоих случаях утрачивается контроль за объемами производства и ассортиментом конечной продукции, а в последнем возникает еще и двойная система цен, так как цены реализации продуктов, установленные оптимальным планом, минимизирующим, например, совокупные затраты, как правило, не совпадают с теми ценами, по которым стоимость соответствующих продуктов учитывается в затратах производств, использующих их в качестве ресурсов.

Анализ этой ситуации [1] свидетельствует о том, что альтернатива – в переходе от непосредственного контроля за распределением ресурсов мощностей предприятий к регулированию только конечных результатов их деятельности. Цель настоящей работы – изучить эту возможность, оставаясь в рамках достаточно простого математического аппарата, использованного в [1], когда структура материальных потоков между различными видами производств определяется в леонтьевской модели, а ограничения по выпуску продукции – содержащими нуль, выпуклыми, замкнутыми и ограниченными множествами. Векторы, о которых будет идти речь, могут рассматриваться как в локальных подпространствах (аффинных оболочках), порождаемых соответствующими (выпуклыми) объектами, так и (после дополнения их нулевыми компонентами) в качестве элементов одного пространства, в котором и имеют смысл соответствующие векторные суммы. Для описания массивов и скалярных величин применяются нижние индексы, векторы же и совокупности векторных величин описываются с верхними индексами.

1. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Напомним, что конечные результаты деятельности предприятия $j \in J$ определяются в [1] вектором y^j с компонентами

$$y_i^j = \begin{cases} x_i^j - \sum\limits_{s \in I_j} a_{isj} x_s^j, & i \in I_j, \\ -\sum\limits_{s \in I_j} a_{isj} x_s^j, & i \notin I_j, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{isj} – технологический коэффициент затрат продукта i при изготовлении предприятием j единицы продукта s. Продукт i может при этом выпускаться предприятием, или не входить в область его специализации $i \in I_j$ (конкретный план производства). Для последующего анализа удобно собрать эти коэффициенты в набор векторов a^{sj}. Вектором x^j (с компонентами x_i^j) определяются возможные объемы производства различных продуктов (в области специализации предприятия $i \in I_j$), а множество его производственных возможностей X_j описывается ограничениями

$$f_j(x^j) \leqslant T_j, \tag{2}$$

$$x_i^j \geqslant 0. \tag{3}$$

В (2) используется калибровочная функция $f_j(z^j)$ (вообще говоря, некоторого другого выпуклого множества Z_j, совпадающего с X_j в неотрицательном конусе). Это позволяет определить с помощью одной константы $T_j > 0$ понятие мощности как единственного ресурса, ограничивающего возможности производства при любых пропорциях выпуска. Как известно, $f_j(z^j)$ – выпуклая функция, причем $f_j(0) = 0$, а для всех $z^j \neq 0$ она положительно однородна и положительно определена [2].

Если в системе имеются предприятия, способные производить любой продукт (подмножество производителей продукта i обозначим J_i), то можно попытаться создать глобальный баланс

$$\sum_{j \in J_i} x_i^j - \sum_j \sum_s a_{isj} x_s^j - y_i = 0, \tag{4}$$

где вектор y указывает объемы и ассортимент всех видов конечной продукции, которые возможно произвести в данной системе.

Теперь возникает вопрос о средствах, которыми следует (или можно) воздействовать на предприятия, чтобы добиться в каком-то смысле "хороших" состояний балансов (4). Для плановой системы естественно искать ответ в оптимальном планировании значений вектора конечной продукции. В замкнутой экономике при этом должны выполняться неравенства

$$y \geqslant 0, \tag{5}$$

а критерий оптимальности можно представить в форме

$$\max U(y). \tag{6}$$

Условия (2)–(5) определяют множество допустимых значений вектора объемов производства конечной продукции Y (выпуклое и компактное). Если $U(z)$ – вогнутая, собственная и замкнутая функция, то максимум в (6) достигается [3]. Если же $U(z)$ только вогнутая и собственная функция, а Y только выпуклое множество, но $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}\, U) \cap \mathrm{ri}\, Y \neq \emptyset$ ($\mathrm{ri}\, Y$ заменяется на Y, если Y – полиэдрально), то для описания оптимальных решений задачи (2)–(6) можно использовать теорему о разделяющей гиперплоскости [3], точнее, определив величины

$$\pi_i^j(p) = p_i - pa^{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J_i, \tag{7}$$

представить необходимые и достаточные условия оптимальности решения (2)–(6) в виде

$$\forall z\colon U(z) \leqslant U(y) + w(z - y), \tag{8}$$

$$w \leqslant p, \; y \geqslant 0, \; wy = py, \tag{9}$$

$$\pi_i^j \leqslant r_j t_i^j, \quad x_i^j \geqslant 0, \quad \pi_i^j x_i^j = r_j t_i^j x_i^j, \tag{10}$$

$$f_j(x^j) \leqslant T_j, \quad r_j \geqslant 0, \quad r_j f_j(x^j) = r_j T_j, \tag{11}$$

$$f_j(x^j) = \sum_{i \in I_j} t_i^j x_i^j \tag{12}$$

при условии, что y_i и x_i^j связаны равенствами (4). Для обоснования этого утверждения нужно использовать несколько теорем из теории двойственности, развитой Р. Рокафелларом в [3]. Здесь ограничимся лишь краткими пояснениями.

Так как вектор y должен быть нормальным Y и субградиентом вогнутой функции $U(z)$, то выполняются (8), (9) при условии, что p нормален множеству Z, определенному с помощью (2)–(4), т.е. $py = \max\{pz \mid z \in Z\}$. Последняя задача распадается по предприятиям, причем каждую из локальных задач можно представить в одной из двух эквивалентных форм

$$\max\{\pi^j x^j \mid x^j \in X_j\}, \quad \max\{py^j \mid y^j \in Y_j\}, \tag{13}$$

где Y_j определяется с помощью (1)–(3). В результате должны выполняться (10), (11), а t^j – один из субградиентных векторов функции $f_j(z^j)$ в точке x^j, на что и указывает (12).

Если f_j дифференцируема, то t^j – градиент в точке x^j, (9)–(11) – условия Куна – Таккера задачи $\max\{wy \mid y \in Y\}$, а (12) – тождество Эйлера. Если коэффициенты t^j_i не зависят от x^j, то функция $f_j(z^j)$ становится линейной и все ее вхождения в (2)–(12) заменяются формой $t^j x^j$. Условие (12) после этого становится тождеством, а в (13) определены задачи линейного программирования.

2. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

Теперь задача состоит в том, чтобы описать скрывающийся за условиями (8)–(12) экономический механизм. Заметим, что при $x_i^j > 0$ выполняется равенство $\pi_i^j = r_j t_i^j$ и $x^j_i = 0$, если $\pi_i^j < r_j t_i^j$.

Чтобы интерпретировать эти соотношения, примем гипотезу об отсутствии "рога изобилия", которая в данном случае будет состоять из двух частей

$$\forall s, i, j : a_{sij} \geqslant 0, \quad \forall i, j \in J_i : \max_s a_{sij} > 0. \tag{14}$$

Первая означает, что ни одна из технологий не может производить свой продукт, не используя при этом некоторые количества каких-то других продуктов, а вторая

$$\forall j \in J : r_j > 0 \rightarrow t_i^j > 0, \quad \forall_i \in I_j, \tag{15}$$

устанавливает эффективность оптимального плана производства x^j при полном использовании ресурсов мощности.

Здесь, по-видимому, будет не лишним следующее пояснение. Если в оптимальном плане имеются свободные ресурсы мощности: $x^j \neq 0$, но $f_j(x^j) < T_j$, то $\lambda f_j(x^j) = T_j$ при некотором значении $\lambda > 1$. По однородности $\lambda f_j(x^j) = f_j(\lambda x^j)$ и, таким образом, λx^j – допустимый план производства. Иначе говоря, все положительные компоненты вектора x^j можно увеличить одновременно, оставаясь в рамках имеющихся ресурсов мощности; поэтому в экономико-математической литературе [4–8] такой план производства называют неэффективным. Разумеется, по дополняющей нежесткости в (11), $r_j = 0$.

Если $r_j > 0$, то в соответствии с (11) и (12) выполняются равенства $T_j = f_j(x^j) = t^j x^j$ и $x^j \neq 0$, так как $T_j > 0$. Для любого $z^j \neq x^j$ по неравенству Фенхеля [3] получаем, что $f_j(z^j) \geqslant t^j z^j$. Если, кроме того, $z^j \geqslant x^j$, то $t^j z^j > T_j$ согласно (15), т.е. $f_j(z^j) > T_j$ и вектор z^j не может быть допустимым. Таким образом, никакие компоненты x^j нельзя увеличить, не уменьшая одновременно некоторых его других компонент. По [4–8] это и означает, что вектор x^j эффективен. Условие (15) накладывает на множества Z_j

ограничения экономического характера, вообще говоря, не обусловленные их математической конструкцией.

Пусть, кроме того, $p > 0$. Тогда, обращаясь к (7), нетрудно заметить, что себестоимость единицы продукции (i на предприятии j) определяется равенством $c_i^j = pa^{ij}$, причем, в соответствии с (14), $c_i^j > 0$, а π_i^j – созданная при этом добавленная стоимость. Таким образом, как и в затратной модели [1], экономический эффект от использования единицы мощности для всех продуктов, произведенных предприятием по оптимальному плану, достигает максимального значения r_j независимо от наименования продукта: неравенство (10) при $r_j > 0$ можно представить в форме $r_j \geqslant (p_j - c_i^j)/t_i^j$, а продукты с меньшей эффективностью или убыточные ($p_j < c_i^j$) не производятся. Коэффициенты полных затрат $d_i^j = c_i^j + r_j t_i^j$ позволяют представить неравенства (10) в форме $p_i \leqslant d_i^j$, означающей, что любой продукт изготавливается при наиболее низком, возможном при данной технологии уровне полных затрат. Но в отличие от модели минимизации затрат [1], где коэффициенты c_i^j определены в произвольных ценах $q \neq p$, в данном случае гарантируется равенство $q = p$, т.е. коэффициенты c_i^j рассчитываются в тех же ценах p, по которым происходит и последующая реализация продуктов. Это позволяет рассматривать их как одну из форм цен производства.

Важная особенность любой технологии – экономическая эффективность, если используется предприятием, получающим доход: $r_j, x_i^j > 0 \rightarrow p_j - c_i^j > 0$. Как и в затратной модели, возникающие в технологических процессах индивидуальные ренты $R_{ij} = r_j t_i^j$ складываются и по условиям (10), (11) переносятся на мощность предприятия, так что имеют место равенства

$$\pi^j x^j = px^j - c^j x^j = py^j = r_j T_j. \tag{16}$$

Суммируя в последнем из них показатели по предприятиям, получаем основное макроэкономическое соотношение этой модели

$$py = R, \tag{17}$$

где R – вся созданная системой добавленная стоимость, или доход. Вклады в него предприятий $r_j T_j$ будем обозначать R_j.

Первый член (4) определяет в натуральном выражении валовые объемы производства продуктов, второй – связанные с ними объемы производственного потребления, третий – объемы производства всех видов конечной продукции, причем условия (8), (9) гарантируют оптимальность последних по критерию, поэтому (4) вполне естественно рассматривать в качестве баланса между величиной общественных потребностей a_i и валовыми объемами производства x_i.

Следовательно, в той части, которая относится к минимизации затрат для удовлетворения заданных потребностей, обе модели идентичны. Различие между ними заключается в том, что модель оптимизации конечного продукта содержит внутренние механизмы определения векторов потребностей и цен через оптимальные решения (2)–(6) и двойственной задачи. Плановик, воспринимающий экономику в категориях общественных потребностей и общественно необходимых затрат, пытается определить эти величины прямыми измерениями и, не располагая соответствующими инструментами, должен столкнуться с непреодолимыми трудностями. Они возникают, поскольку необходимый для этих измерений формальный аппарат создает модель (2)–(6), вводя в систему экономических категорий критерий оптимальности $U(z)$ и вектор w.

Так, как $y_i = 0$, если $w_i < p_i$ и $w_i = p_i$, когда $y_i > 0$, w_i можно рассматривать в качестве измерителя потребительской стоимости единицы продукта $i \in I$. В оптимальном плане продукты с более высокой ценой производства выпускаются только как промежуточные, необходимые для удовлетворения производственных потребностей и в сферу конечного потребления не попадают. Критерий содержит информацию для определения всех значений вектора w, но при любом конкретном его значении множество оптимальных решений задачи $\max\{wz \mid z \in Y\}$, вообще говоря, шире множества оптимальных решений (2)–(6), поэтому заменить критерий $U(z)$ каким-либо фиксированным набором коэффициентов потребительской стоимости w_i нельзя.

3. ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Полагая $w = 0$ и обращаясь к (8), нетрудно заметить, что оптимальная точка будет соответствовать безусловному экстремуму (6), а ненулевые цены производства по (9) смогут появиться только у промежуточных продуктов. Но тогда, согласно (17), $R = 0$, а значит, и все $r_j = 0$.

Таким образом, концепция оптимального планирования не исключает существования экономики, в которой доходы не создаются. При этом в конечный набор y могут войти все продукты ($y > 0$ с обязательным равенством $p = 0$), и, значит, цен производства в такой экономике фактически тоже нет, а производственные мощности могут использоваться не полностью.

Возможность существования такого типа решений связана, однако, с нарушением условия монотонности спроса, которое обычно [4–7] вводится в форме $\forall z, y: z > y \to \to U(z) > U(y)$. Представляется, что имеет смысл ослабить первое неравенство в этой импликации, так как полезность избыточного производства во многих случаях сомнительна. Поэтому будем говорить о неограниченном спросе на продукт i, когда вектор $y(i)$ совпадает с y по всем компонентам кроме i-й, и выполнено условие

$$\forall y \in Y: y(i) \geqslant y \to U(y(i)) > U(y). \tag{18}$$

Теорема 1. *В оптимальном плане* (2)–(6) *для продуктов с неограниченным спросом выполняются неравенства* $p_i, w_i > 0$.

Предположим, что существует s, для которого (18) и неравенство $w_s \leqslant 0$ имеют место одновременно. Поскольку значение z в (8) можно выбирать произвольно, заменяя его на $y(s)$, обнаруживаем, что (8) и (18) противоречат друг другу, следовательно, $w_s > 0$, а по (9) и $p_s > 0$.

Теперь существуют две возможности: считать неограниченным спрос на все продукты или найти дополнительные условия, при выполнении которых лишь наличие в экономике таких продуктов приводило бы к положительным ценам производства.

Будем говорить, что система балансовых связей модели (2)–(6) приводима (содержит отличные от самой себя подмодели [8]), если в наборе продуктов существует такое собственное подмножество I_0, что каждый продукт из I_0 можно произвести с помощью технологий, не использующих в качестве ресурсов наименований из $I \backslash I_0$; в противном случае – неприводима.

Теорема 2. *В оптимальном плане* (2)–(6) $a, p > 0$, *т.е. производятся все продукты и по ненулевым ценам, если имеются продукты с неограниченным спросом, система балансовых связей неприводима и производятся конечные продукты* ($y \geqslant 0$).

По условиям теоремы в a и p должны быть положительные элементы. Соберем коэффициенты a_{isj} в матрицу A, рассматривая комбинации s, j в качестве индексов столбцов и сохраняя в перечислении s порядок, принятый для i в перечислении строк. В последнем же сначала укажем продукты с положительными объемами производства и лишь потом с нулевыми (рис. 1, а). Теперь в левой его половине ($a_i > 0$) перегруппируем технологии, перечисляя сначала те, интенсивности которых положительны.

	$a_i > 0$		$a_i = 0$
a_i	$E - A_{10}$	$E - A_{11}$	$-A_{12}$
0	0	$-A_{21}$	$E - A_{22}$
	$x^j > 0$	$x^j = 0$	

а

	$p_i > 0$	$P_i = 0$
p_i	$E - A_1$	0
0	$-A_{21}$	$E - A_2$
	$x^j > 0$	$x^j > 0$

б

Рис. 1

Эти технологии производят все продукты из I_0 и не могут использовать продукты из $I \backslash I_0$, поскольку последние в модели не выпускаются, т.е. продукты из I_0 изготавливаются только с использованием продуктов из I_0, а значит, модель приводима. Наглядно это показано в левой нижней части рис. 1, а, где все элементы $a_{isj} = 0$. Таким образом, $a > 0$.

Теперь (рис. 1, б) оставим в A лишь технологии с положительными интенсивностями, а продукты с нулевыми ценами перечислим после продуктов с положительными ценами. Снова A приводима, так как в правом верхнем углу не может быть элементов, отличных от нуля по (10), (11), а значит, $p > 0$.

Таким образом, в экономике, допускающей нулевые значения для производства, A имеет вид, представленный на рис. 1, б. Это объединение двух экономик с подматрицами A_1 и A_2, но первая из них использует продукты, произведенные во второй. Такая связь будет сильной, если обе подматрицы неприводимы, а в каждом столбце подматрицы A_{12} имеется хотя бы один положительный элемент. В этом случае первая экономика, производя конечные продукты ($y_1 \geqslant 0$), создает и доход, ибо $R_1 = p_1 y_1 > 0$, и своего рода конечный продукт для второй, так как $A_{21}x_1 \geqslant 0$. Следовательно, в каждой из них будут производиться все продукты, но во второй, даже если она выпускает конечные продукты, доходы не создаются. Ресурсы же, которые первая экономика получает из второй, являются для нее даровыми.

Из сказанного можно сделать вывод, что цены производства, а с ними и экономические отношения, или отсутствие тех и других, зависят не от уровня развития производительных сил, а от психологии потребления и типа межпроизводственных связей. В неприводимой системе устанавливаются положительные цены производства на все продукты при появлении среди них хотя бы одного с неограниченным спросом. Однако, прививая привычки к самоограничениям, можно создать в критерии точку насыщения спроса по всем продуктам, которая даже при весьма скромных производственных возможностях окажется внутри производственного множества. Приводимая система может оказаться комбинацией этих двух типов экономик, когда в одной из них создаются конечный продукт и доходы, а вторая формируется лишь как сырьевой придаток первой.

В неприводимой системе с неограниченным спросом на некоторые продукты возможен другой сюрприз – положительные цены без производства и доходов. Имеется в виду теорема об альтернативах [5]: при любой реализации A выполняется только одно из двух условий – совместны соотношения (3)–(5), причем $\max\limits_i y_i > 0$, или существуют такие цены q^0, что выполняются неравенства

$$q^0 > 0, \quad q_i^0 - q^0 a^{ij} \leqslant 0 \forall i, j \in J_i. \tag{19}$$

Экономику будем называть продуктивной, если реализуется первая альтернатива, и непродуктивной, когда для некоторого q^0 выполняются неравенства (19).

Теорема 3. *Если* $0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}U)$, *то в непродуктивной экономике прекращение производства – оптимально.*

	UJ_i	UJ_i
q	$E_1 - A_{11}$	$-A_{12}$
0	$-A_{21}$	$E_2 - A_{22}$
	$i \in I_0$	$i \in N_0$

Рис. 2

Попробуем для всех $i, j \in J_i$ положить $x_i^j = 0$. Поскольку $f_j(0) = 0 < T_j$, все $r_j = 0$. Если теперь в качестве цен производства взять вектор q^0 из (19), то выполнятся условие (11) и (10), причем последнее принимает вид $\pi_i^j \leq 0$ и становится положительно однородным по q^0. По условию теоремы $U(z)$ субдифференцируема в нуле [3], а значит, неравенства (9) выполняются (и даже строго) для векторов λq^0 при $\lambda > 0$ и w^0, когда для последнего имеет место (8) (при $y = 0$). В силу однородности (10) q^0 в них можно заменить на λq^0. Таким образом, план $y_i = 0, x_i^j = 0 \; \forall i, j \in J_i$ оптимален, а цены производства положительны, ибо $\lambda q^0 > 0$.

Теорема 4. *Если A – продуктивна и $p > 0$, то в оптимальном плане производятся конечные продукты и создаются доходы.*

Простой будем называть экономику, в которой для производства каждого продукта оставлена лишь одна технология. Очевидно, исходная экономика продуктивна тогда и только тогда, когда продуктивна хотя бы одна из составляющих ее простых экономик. Пусть такая нашлась. Построим для нее, не обращая внимания на мощности, сбалансированное решение x_0 с полуположительным вектором $y_0 \geqslant 0$. Вектором x_0 определены планы всех предприятий, для некоторых, может быть, нулевые. Если при этом какие-то из неравенств (2) не удовлетворены, то $\lambda f_j(x_0^j) \leqslant T_j \forall j \in J$ при некотором $\lambda > 0$. По однородности $\lambda f_j(x_0^j) = f_j(\lambda x_0^j)$ и план λx_0 будет сбалансирован с вектором $\lambda y_0 \geqslant 0$. Поскольку для оптимального плана выполнены неравенства $\pi^j x^j \geqslant \pi \lambda^j x_0^j$, суммируя их по j, получаем (так как $p > 0$) $py \geqslant \lambda p y_0 > 0$ и, значит, по (17), $R > 0$, а $y \neq 0$.

Если цены q полуположительны, т.е. при $i \in I_0$ выполнены неравенства $q_i > 0$, но $q_i = 0$ при $i \in N_0$ и $N_0 \neq \emptyset$, то в нашей модели естественным образом выделяются две подмодели. Первая включает все технологии, производящие продукты из I_0, вторая – соответственно из N_0, как показано на рис. 2.

Теорема 5. *Если A продуктивна и неприводима, то при любых полуположительных ценах q среди технологий, производящих продукты только из I_0, найдутся экономически эффективные. Однако модель с технологиями из I_0 непродуктивна.*

Технология i, j экономически эффективна при ценах q, если $j \in J_i$ и выполнено неравенство

$$\pi_i^j(q) > 0, \tag{20}$$

т.е. находится предприятие, для которого производство некоторого продукта экономически оправданно, ибо создает добавленную стоимость. Предположим, что все технологии, производящие продукты из I_0, неэффективны, т.е. для ситуации, показанной на рис. 2, выполнены неравенства $q(E_1 - A_{11}) \leqslant 0$. Среди продуктов из N_k в этом случае должно существовать подмножество $I_1 \neq \emptyset$ таких продуктов, все технологии производства которых при ценах q убыточны (иначе A приводима). Но тогда для каждого i из I_1 можно определить положительное значение цены, полагая его равным $\min\{qa^{ij} \mid j \in J_i\}$, и все технологии, производящие продукты из I_1, останутся при этом неэффективными. Возникла исходная ситуация, но на более широком подмножестве продуктов $I_0 \cap I_1$, поэтому продолжение процесса должно привести к положительным ценам, для которых выполнятся неравенства (19), что невозможно, так как A продуктивна.

Если бы модель, включающая только технологии производства продуктов из I_0, была продуктивной, то в A_{11} нашлась бы простая продуктивная подмодель с нулевыми элементами в соответствующей ей подматрице из A_{21}, т.е. A оказалась бы приводимой.

Следствие 1. *Продуктивная экономика с неприводимой системой балансовых связей допускает компактное описание*

$$F(y) \leqslant 1, \; y \geqslant 0, \tag{21}$$

где $F(z)$ – калибровочная функция ее технологического множества Z, содержащего кроме сбалансированных также и несбалансированные решения z с компонентами любого знака. При этом в неравенстве Фенхеля

$$F(z) \geqslant tz. \tag{22}$$

$t \geqslant 0$ и $t > 0$, если $F(y) = ty$ и $y \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим при $q \geqslant 0$ совокупность задач (13). По теореме 5 для некоторого i найдется эффективная технология j и одно из допустимых решений – произвести этот продукт по указанной технологии. В (10) тогда получаем $x_{ij} > 0 \to \pi_{ij}(q) = r_j t_{ij}$ и, поскольку $\pi_{ij}(q) > 0$, то r_j, $t_{ij} > 0$. Кроме того, по (11) $f_j(x_{ij}) = T_j$.

Таким образом, для оптимального плана такого предприятия выполнится неравенство $\pi^j(q)x^j(q) > 0$. Для предприятий, не имеющих при ценах q экономически эффективной технологии, справедливы неравенства $\pi_i^j(q) \leqslant 0 \; \forall i \in I_j$. Не нарушая (10), (11), r_j, $x^j = 0$. С помощью (1) теперь преобразуем полученные решения в векторы y^j и сформируем их сумму $\eta(q)$. Так как $q\eta(q) > 0$, то q можно перенормировать полагая $t = q/q\eta(q)$, и определить калибровочную функцию известной конструкцией [2]: если $z = \mu\eta(q)$ и $\mu > 0$, то $\lambda(z)z = \eta(q)$, а $F(z) = 1/\lambda(z)$. Если при этом окажется, что $\eta(q) \geqslant 0$, то в q, а значит, и в t, не может быть нулевых элементов, так как по теореме 5 при наличии последних в q подмодель, из которой определяется $\eta(q)$, непродуктивна.

Итак, положительные цены производства гарантируются лишь в экономике с неприводимой системой балансовых связей и при наличии продуктов с неограниченным спросом. Если она к тому же продуктивна, то не только производит все продукты, но и продукты конечного потребления и создает доход. Затраты производства всех продуктов будут положительными лишь при отсутствии "рога изобилия". Если же какие-то из указанных условий не выполнены, то возможны отклонения от "нормального" функционирования экономического механизма.

4. ГЛОБАЛЬНОЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Теперь рассмотрим некоторый набор $k \in K$ экономик описанного типа с множествами продуктов собственного производства I_k, критериями оптимальности $U_k(z^k)$ и множествами производственных возможностей Y_k. По следствию 1 множество Y_k можно представить условиями (21). Кроме того, предположим, что продукты из $I \backslash I_k$ в небольших количествах $0 \leqslant y_i^k \leqslant \varepsilon a_i^k$ проникают в любую экономику. Ее критерий тогда естественно считать определенным на всем множестве продуктов I, а условия оптимальности описываются соотношениями

$$y_i^k \leqslant \varepsilon a_i^k, \quad p_i^k \geqslant 0, \quad p_i^k y_i^k = p_i^k \varepsilon a_i^k, \quad i \in I \setminus I_k, \tag{23}$$

$$\forall z^k: \; U_k(z^k) \leqslant U_k(y^k) + w^k(z^k - y^k), \tag{24}$$

$$w_i^k \leqslant p_i^k, \quad y_i^k \geqslant 0, \quad w_i^k y_i^k = p_i^k y_i^k, \quad i \in I, \tag{25}$$

$$F_k(y_0^k) \leqslant 1, \quad R_k \geqslant 0, \quad R_k F_k(y_0^k) = R_k, \tag{26}$$

$$F_k(y_0^k) = \sum_{i \in I_k} t_i^k y_i^k, \tag{27}$$

$$p_i^k = R_k t_i^k, \quad i \in I_k. \tag{28}$$

По (23) и (25) $p_i^k = \max[0, w_i^k], \quad \forall i \in I \setminus I_k$. В соответствии с этим $y_i^k = 0$ при $w_i^k < 0$ и $y_i^k = \varepsilon a_i^k$ при $w_i^k > 0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что вектор p^k можно доопределить на I через субградиентные векторы $U(z)$ в точках y^k при условии, что $y_i^k = 0 \; \forall i \in I \setminus I_k$. Проекции y^k, z^k на I_k, как это сделано в (26), (27), обозначим y_0^k, z_0^k.

Относительно продуктов из I_k существуют две возможности. Если $R_k = 0$, то по (28) $p_i^k = 0$, а $w_i^k \leqslant 0$ по (25). Продукты с отрицательной полезностью, конечно, не производятся, а с нулевой являются даровыми, удовлетворяющими потребности в некотором смысле полностью, так как любое допустимое изменение значения y_i^k не увеличивает, а может быть, уменьшает значение критерия.

Если в I_k имеются продукты с неограниченным спросом, то $R_k > 0$ и по (28) и следствию 1 $p_i^k > 0 \; \forall i \in I_k$. Так как при этом $F_k(y_0^k) = 1$, то $y_0^k \neq 0$, но необязательно производятся все продукты из I_k, ибо для некоторых могут выполняться неравенства $w_i^k < p_i^k$. По неравенству Фенхеля для $z_0^k \in Z_k$ имеем $F_k(z_0^k) \geqslant t^k z_0^k$ и, кроме того, выполнено условие $F_k(z_0^k) \leqslant 1$. Умножая оба эти неравенства на R_k, получаем, что $R_k \geqslant p^k z_0^k \forall z_0^k \in Z_k$, а так как $y_i^k = 0 \quad \forall i \in I \setminus I_k$, то в соответствии с (27) и (28) $R_k = p^k y^k$, иначе говоря

$$p^k y^k \geqslant p^k z^k \forall z^k \in Z_k, \tag{29}$$

т.е. в ценах производства достигается максимум добавленной стоимости не только на множестве сбалансированных решений Y_k, но и на всем технологическом множестве Z_k (при условии, что $z_i^k = 0 \; \forall i \in I \setminus I_k$).

Теперь пусть $z^k \geqslant 0$ на всем I. По (25) $w^k z^k \leqslant p^k z^k$, а $w^k y^k = p^k y^k$ и, значит, последний член в неравенстве (24) можно заменить на $p^k z^k - R_k$, ибо от этого указанное неравенство только усиливается, т.е.

$$\forall z^k \geqslant 0: \; U_k(z^k) \leqslant U_k(y^k) + p^k(z^k - y^k). \tag{30}$$

Таким образом, если $U_k(z^k) > U_K(y^k)$, то $p^k z^k > R_k$, а значит, все планы, более предпочтительные, чем y^k, лежат за пределами бюджетных ограничений

$$p^k z^k \leqslant R_k, \quad z^k \geqslant 0. \tag{31}$$

Следовательно, план y^k сбалансирован, обеспечивает максимальный доход в ценах p^k и все планы с бóльшим значением критерия находятся в области более высоких доходов. Что же заставляет такие системы обращаться к кооперации? Оказывается, для всей совокупности экономик решение $y^0 = \Sigma y^k$, вообще говоря, неэффективно. Чтобы сформулировать следующее ниже утверждение, необходимо сделать отступление.

Доходы можно измерять с помощью разных систем оценок. При некоторых из них максимум дохода на множестве Y_k будет достигаться в точке y^k, хотя указанное решение может быть и неединственным. Более точно, нас будет интересовать множество $P_k(y^k|Y_k) = \{\rho^k \geqslant 0 | \rho^k y^k \geqslant \rho^k z^k \forall z^k \in Y_k\}$. По терминологии [3], это – выпуклый конус, являющийся пересечением неотрицательного и нормального конусов, когда последний определен в точке y^k множества Y_k. При оценках $\rho^k \notin P_k(y^k|Y_k)$ вектор y^k уже не будет максимизировать доход на Y_k. Наконец, если $\rho \geqslant 0$ – вектор оценок, определенных на I, то проекцией его на I_k назовем подмножество его компонент ρ_i^k, $i \in I_k$.

Теорема 6. *Если во всех экономиках имеются продукты с неограниченным спросом, то выполняется только одна из двух альтернатив*: $\theta y^0 \in \Sigma Y_k$ *при* $\theta > 1$ *или на* I *существует такой вектор оценок продуктов* $\rho \geqslant 0$, *что* $\rho^k \in p_k(y^k|Y_k) \forall k \in K$.

Выполнение второй альтернативы означает, что на идентичные продукты, производимые в разных экономиках, можно установить одинаковые оценки и одновременно с этим так определить оценки остальных продуктов (уникальных в соответствующей экономике), что все y^k остаются планами, максимизирующими доходы. Если это невозможно, т.е. y^k максимизируют доходы соответствующих экономик лишь при некоторой неизбежной дифференциации оценок, то выполняется первая альтернатива и все положительные компоненты вектора y^0 можно увеличить, сохраняя пропорции производства и оставаясь при этом в рамках производственных возможностей всей совокупности экономик.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим вариант задачи Л.В. Канторовича [9]: $\max\{\vartheta \mid \Sigma z^k \geqslant \vartheta y^0, z^k \in Y_k \forall k \in K\}$. Условия оптимальности ее плана $(\theta, \zeta^k, k \in K)$ имеют вид

$$\Sigma\zeta^k \geqslant \theta y^0, \quad \rho \geqslant 0, \quad \Sigma\rho\zeta^k = \theta\rho y^0, \tag{32}$$

$$\rho y^0 = 1, \tag{33}$$

$$F_k(\zeta^k) \leqslant 1, \quad \vartheta_k \geqslant 0, \quad \vartheta_k F_k(\zeta^k) = \vartheta_k, \tag{34}$$

$$\zeta_i^k \geqslant 0, \quad \vartheta_k \tau_i^k \geqslant \rho_i, \quad \vartheta_k \tau_i^k \zeta_i^k = \rho_i \zeta_i^k. \tag{35}$$

$$F_k(\zeta^k) = \tau^k \zeta^k. \tag{36}$$

Так как $\max_i y_i^0 > 0$, то по (33), $\max_i \rho_i > 0$, а значит, согласно (32), (35), и $\max_k \vartheta_k > 0$. Таким образом, в системе имеются мощности, лимитирующие объемы производства, и продукты, предложение которых не может превышать величины θy_i^0. Такие мощности будем называть лимитирующими, а продукты лимитированными. Если в оптимальном плане $\rho_i = 0$, а $\vartheta_k > 0$, то по (35), поскольку $\tau_i^k > 0$ на I_k, получим $\zeta_i^k = 0$, т.е. нелимитированные продукты лимитирующими мощностями не производятся. Ситуация $\rho_i > 0$, $\vartheta_k = 0$ неравенствами (35) исключается. Следовательно, либо все $\vartheta_k > 0$, либо во всей совокупности продуктов, которые производятся нелимитирующими мощностями, лимитированных нет, т.е. указанные мощности производят только продукты, получившие в оптимальном плане нулевые оценки, наборы которых для соответствующих I_k и являются элементами $P_k(y^k \mid Y_k)$.

По условию теоремы $F_k(y^k) = 1 \; \forall k$ и, значит, при $\vartheta_k > 0$ $\vartheta_k = \vartheta_k F_k(y^k) \geqslant \vartheta_k \tau^k y^k$ по неравенству Фенхеля и $\vartheta_k \tau^k y^k \geqslant \rho y^k$ по (35). После суммирования по k получаем $\Sigma\vartheta_k \geqslant$

$\geqslant \rho y^0$ и, используя (33), $\theta \geqslant 1$, ибо $\theta = \Sigma\vartheta_k$. Таким образом, либо при всех $\vartheta_k > 0$ выполнены равенства $\vartheta_k F_k(y^k) = \rho^k y^k$ и $\rho^k \in P_k(y^k \mid Y_k)$, либо имеет место $\theta > 1$.

Технологическое множество совокупности экономик определим не суммой ΣZ_k, а пересечением опорных подпространств этого множества $Z = \{z \mid qz \leqslant q\eta(q) \forall q \geqslant 0\}$ при условии, что направляющие векторы соответствующих гиперплоскостей полуположительны. При таком определении Z все опорные точки множества ΣZ_k, на которых максимизируется доход при произвольном выборе цен $q \geqslant 0$, войдут в Z. Подмножество сбалансированных решений $Y = \{z \mid z \in Z, z \geqslant 0\} \neq \emptyset$, если в каждой из экономик существует локальное равновесие, так как в этом случае $y^0 \in Y$.

Отметим, что поскольку значение $p\eta = \max\{pz \mid z \in \Sigma Z_k\}$ достигается тогда и только тогда, когда $\eta = \Sigma\eta^k$, а

$$p\eta^k \geqslant pz^k, \quad \forall z^k \in Z_k. \tag{37}$$

то $p\eta^k \geqslant py^k \; \forall k \in K$, поскольку $y^k \in Y_k \subseteq Z_k$.

Таким образом, отказываясь от собственного сбалансированного решения y^k в пользу возможно несбалансированного η^k, любая локальная экономика в ценах p не уменьшает своего дохода. При этом в системе общего рынка она получает доступ не только к продуктам собственного производства из I_k, но и ко всему множеству продуктов I, а значит, по крайней мере теоретически, может себе обеспечить наилучший из наборов потребления ξ^k, который определяется одним из оптимальных решений задачи $\max\{U_k(z) \mid pz \leqslant p\eta^k,\ z \geqslant 0\}$.

Если $p \geqslant 0$, то, по теореме 5, $p\eta^k > 0$, а поскольку y^k – допустимый вектор этой задачи, можно использовать теорему о разделяющей гиперплоскости [3]. Анализируя соответствующие условия, нетрудно показать, что для оптимальных ее решений при некотором $\sigma_k > 0$ должны иметь место соотношения

$$\forall z^k \geqslant 0 \colon \sigma_k U_k(z^k) \leqslant \sigma_k U_k(\xi^k) + p(z^k - \xi^k), \tag{38}$$

$$p\xi^k = p\eta^k. \tag{39}$$

Однако общий баланс между производством и потреблением

$$\eta \geqslant \xi, \tag{40}$$

где $\xi = \Sigma\xi^k$, без которого длительное функционирование системы глобального равновесия невозможно, обеспечивается, к сожалению, лишь при некоторых системах цен – ценах равновесия, для существования которых необходимо выполнение дополнительных условий [4–7].

Суммируя (39) по k, получаем равенство, известное как закон Вальраса

$$p\xi = p\eta. \tag{41}$$

Поскольку $p \geqslant 0$, из (40), (41) $p_i = 0$ при $\eta_i > \xi_i$ и $\eta_i = \xi_i$ при $p_i > 0$, иначе говоря, $\eta = \xi$ при $p > 0$ и равновесие сохраняется пока технологические сдвиги или изменение вкусов потребителей его не нарушат. Как интерпретировать равновесие при строгом выполнении части неравенств в (40) и нулевых значениях цен, неясно, так как в динамике запасы избыточно производимой продукции будут расти без каких-либо ограничений. Для исключения нулевых значений в ценах равновесия необходимы дополнительные условия; например, если на каждый продукт не ограничен спрос хотя бы в одной из экономик, то можно показать, что $p > 0$.

Таким образом, экономика может находиться в состоянии равновесия либо локального при условиях (29), (30), либо глобального при (37)–(40). Цены, при которых реализуются оба состояния, определены, вообще говоря, неоднозначно, а множества их возможных значений P_k и P выпуклы [3].

Теорема 7. *При переходе всех экономик из K к системе глобального равновесия* *выполняются неравенства*

$$U_k(\xi^k) \geqslant U_k(y^k) \forall k \in K. \tag{42}$$

Если при этом $U_k(\xi^k) > U_k(y^k)$ для некоторого k, то $\xi^k \notin Z_k$. Равенство же $U_k(\xi^k) = U_k(y^k)$ имеет место тогда и только тогда, когда при некотором $\sigma_k > 0$, $\sigma_k P_k \cap P \neq \emptyset$.

Уже отмечалось, что следствием (37) являются неравенства $p\eta^k \geqslant py^k\ \forall k \in K$. В соответствии с (39) $p\eta^k$ можно заменить в них на $p\xi^k$, а в (38), чтобы получить (42), теперь достаточно положить $z^k = y^k$. Если какое-то из неравенств (42) выполняется строго, то из (30) при $z^k = \xi^k$ следует $p^k\xi^k > p^k y^k$, а значит, в силу (29), $\xi^k \notin Z_k$. При $U_k(\xi^k) = U_k(y^k)$, полагая в (38) $z^k = y^k$, получим $py^k \geqslant p\xi^k$, т.е. $py^k = p\xi^k = p\eta^k$. В соответствии с первым из этих равенств и так как функционалы в точках y^k, ξ^k совпадают, можно заменить в (38) ξ^k на y^k. В результате после деления на σ_k неравенство (38) переходит в (30) с ценами $(1/\sigma_k)p$, а поскольку $py^k = p\eta^k$, (37) переходит в (29). Таким образом, вектором $(1/\sigma_k)p$ определяется одна из возможных систем цен локального равновесия, т.е. существует $\sigma_k > 0$, при котором $\sigma_k P_k \cap P \neq \emptyset$.

Если последнее условие выполнено, то в P есть элемент p, который после некоторой перенормировки становится вектором цен локального равновесия p^k. Полагая в (29) $z^k = \eta^k$, получаем, $p^k y^k \geqslant p^k\eta^k$ и для p^k, поскольку p – цены глобального равновесия, выполняется (39), иначе говоря, $p^k y^k \geqslant p^k \xi^k$. Теперь, полагая в (30) $z^k = \xi^k$, имеем неравенство, противоположное (42), а значит, $U_k(\xi^k) = U_k(y^k)$.

Для интерпретации полученных результатов заметим, что величинами p_i^k, $i \in I_k$, полные затраты производства продукта i в экономике k определяются лишь по отношению к аналогичным характеристикам других продуктов, т.е. векторам p^k и $\sigma_k p^k$ при $\sigma_k > 0$ соответствует одна и та же структура полных затрат, а локальное равновесие в экономике k может устанавливаться, вообще говоря, при различных их структурах, все наборы которых не вполне произвольны, а содержатся в конусе $\sigma_k P_k$. При глобальном равновесии любая совместимая с ним структура полных затрат из σP определена на всем множестве продуктов I и потому несопоставима со структурами затрат локальных равновесий. Это затруднение было преодолено пополнением наборов p_i^k величинами $\max[0, w_i^k]$, отражающими возможные значения цен, по которым в экономике k можно реализовать небольшие количества продуктов из $I \backslash I_k$. Появились условия для сравнения структур из P_k с аналогичными им структурами из P.

Теорема утверждает, что, присоединяясь к системе глобального равновесия, экономика не получает никакой дополнительной выгоды, если в P_k уже содержится элемент со структурой, совпадающей с одной из структур полных затрат производства всех продуктов, при которой осуществимо глобальное равновесие. Если же такого элемента в P_k нет, то выигрыш по критерию обеспечен. Особенно интересен случай, когда все неравенства (42) будут строгими, т.е. каждая экономика, присоединившись к системе общего рынка, получает лучший по критерию набор потребительских благ, и такой, который она только собственными усилиями обеспечить себе не может, ибо $\xi^k \notin Z_k\ \forall k \in K$. Однако эта возможность реализуется лишь, когда $\forall \sigma_k > 0$: $\sigma_k P_k \cap P = \emptyset\ \forall k \in K$. Для сравнения отметим, что, если неэффективен y^0 и, кроме того,

$$y^0 > 0, \tag{43}$$

то гарантируется только существование в (42) строгих неравенств (в силу неравенств $p\eta \geqslant \theta p y^0$, $\theta > 1$ и $py^0 > 0$ получаем, что $p\eta > py^0$). По теореме 6, в этом случае не существует никакой общей для всех экономик системы оценок продуктов, при которой все y^k были бы решениями, максимизирующими доходы.

Следующее утверждение завершает описание глобального равновесия, по крайней мере логически.

Теорема 8. *Равновесный вектор* ξ *– это оптимальное решение задачи* $\max\{\upsilon(z) \mid z \in Y\}$, *где для всех* $z \geqslant 0$

$$\upsilon(z) = \max\{\Sigma\sigma_k U_k(z) \mid \Sigma z^k \leqslant z, \quad z^k \geqslant 0 \forall k \in K\}. \tag{44}$$

Цены же равновесия p *являются ее ценами производства.*

Доказательство. Просуммируем по k неравенства (38). В результате возникает неравенство

$$\Sigma\sigma_k U_k(z^k) \leqslant \Sigma\sigma_k U_k(\xi^k) + p(\Sigma z^k - \xi), \tag{45}$$

которое будет выполняться, если все $z^k \geqslant 0$. Пусть, кроме того, $\Sigma z^k \leqslant \xi$. Тогда $\Sigma\sigma_k U_k(z^k) \leqslant \Sigma\sigma_k U_k(\xi^k)$, т.е. должно иметь место равенство $\upsilon(\xi) = \Sigma\sigma_k U_k(\xi^k)$. Теперь левую часть (45) можно заменить на $\upsilon(z)$, если набор z^k – решение задачи (44) при некотором значении $z \geqslant 0$ и неравенство (45) только усилится, если входящую в его правую часть Σz^k заменить на z. Таким образом,

$$\forall z \geqslant 0\colon \upsilon(z) \leqslant \upsilon(\xi) + p(z - \xi). \tag{46}$$

(Здесь можно отметить, что целевая функция (44) при $\sigma_k \geqslant 0$ полунепрерывна сверху, а множество допустимых решений компактно при $z \geqslant 0$.)

По определению Z имеем $p\eta \geqslant pz$, $\forall z \in Z$ и $\eta \in Z$. По (41) в последнем неравенстве η можно заменить на ξ. Таким образом

$$p\xi \geqslant pz, \quad \forall z \in Z. \tag{47}$$

Так как $\xi \geqslant 0$, то по (40) $\eta \in Y$ и, если $\xi \notin Y$, то этот вектор можно отделить от Y некоторой гиперплоскостью, т.е. неравенство $q\xi > q\eta$ выполнилось бы при $q \geqslant 0$. Однако по (40) это невозможно, и значит, $\xi \in Y$. В силу (46) и (47) $\upsilon(z) \leqslant \upsilon(\xi) \forall z \in Y$.

Если построить $\upsilon(z)$ при каких-то произвольных значениях $\sigma_k > 0$, то при условиях (43) и $\theta > 1$ можно использовать теорему о разделяющей гиперплоскости, так как $y^0 \in$ $\in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\upsilon) \cap \mathrm{ri}Y$, и показать, что для определенного значения $p \geqslant 0$ выполнятся все условия глобального равновесия, кроме равенств (39). Другими словами, у некоторых экономик при $p\eta^k > p\xi^k$ возникает избыток денежных средств, у других, при $p\xi^k > p\eta^k$, – их недостаток, но, поскольку вместо (39) выполняется закон Вальраса (41), все образующиеся дефициты можно погасить имеющейся суммой кредитов. В [4–7] эта ситуация обычно рассматривается как равновесие с перераспределением доходов. Таким образом, условия (39) накладывают существенные ограничения на выбор коэффициентов σ_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медницкий В.Г.* О некоторых подходах к оптимальному планированию производства // Экономика и мат. методы. 1993. Т. 29. Вып. 4.
2. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
5. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
6. *Экланд И.* Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
7. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1985.
8. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. *Канторович Л.В.* Математические методы организации производства. Л.: ЛГУ, 1939.

Поступила в редакцию
13 II 1992