ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1995
Том 31, вып. 1

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

© 1994 Лукашин Ю.П.

(*Москва*)

Исследуются проблемы оптимального управления портфелем ценных бумаг; предлагаются новые меры риска, критерии оптимальности, адаптивные процедуры оптимизации и метод сравнения конечных результатов.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

С появлением и развитием рынка ценных бумаг (ЦБ) встает проблема оптимального размещения капиталов. Совокупность приобретенных ЦБ составляет их портфель. Под структурой портфеля ЦБ (ПЦБ) понимается соотношение долей инвестиций в ЦБ различного вида у данного субъекта.

Оптимизация структуры ПЦБ определяется конкретной целью субъекта, т.е. критерием оптимальности. В качестве такого критерия обычно выдвигается отношение доходности портфеля к риску.

Под доходностью ЦБ понимаются не только выплаты дивидендов по ней за единицу времени (например, за год), но и изменение ее курса за тот же отрезок времени. Такой подход объясняется тем, что решением правления или собрания акционерного общества бóльшая часть прибылей может направляться на новые инвестиции, модернизацию технологических процессов, а выплаты дивидендов акционерам могут быть ограничены незначительными суммами или даже вовсе равными нулю. Тем не менее дополнительные капитальные вложения укрепляют положение акционерного общества, возрастает надежда на хорошие доходы в будущем, поэтому курс таких акций может повыситься. Разницу курса целесообразно учитывать как доход акционера, поскольку он имеет возможность легко его реализовать, продав акции. Аналогичные рассуждения справедливы и относительно доходности ПЦБ в целом.

Абсолютный риск владельца ПЦБ часто измеряется стандартным отклонением доходности портфеля. Поскольку такая мера не учитывает дисперсию результатов в сравнении с ожидаемым доходом, используется коэффициент вариации, который равен отношению стандартного отклонения доходности к средней выборочной доходности портфеля. Минимизация этого коэффициента вариации или максимизация обратной к нему величины и определяет оптимальную структуру ПЦБ.

Известно, что существуют государственные ценные бумаги с надежным фиксированным доходом, которые не подвержены воздействию рыночной стихии. Однако доход по таким ЦБ обычно невысок. Более рискованные ЦБ приобретаются в ожидании роста их курса и получения по ним более высоких доходов. Таким образом, задача заключается в том, чтобы структура портфеля обеспечивала наиболее благоприятное соотношение между приростом доходности и возрастанием риска.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Математическая задача обычно ставится так, чтобы найти оптимальные удельные веса инвестиций в различные ЦБ в портфеле субъекта [1–3].

Пусть R_{it} – доходность ЦБ i (например, выраженная в процентах годовой прибыли) в момент t, $i = 1, ..., N$, $t = 1, ..., T$, где N – число рассматриваемых видов ценных бумаг; T – объем выборки (число наблюдений).

Тогда доходность портфеля в момент t равна

$$P_t = \sum_{i=1}^{N} k_i R_{it}, \tag{1}$$

где k_i – постоянный коэффициент, доля инвестиций в i-ю ЦБ, входящую в портфель

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = 1. \tag{2}$$

Математическое ожидание доходности портфеля также является взвешенной средней ожидаемых доходов от отдельных ЦБ

$$\overline{P} = E(P_t) = E(\sum_{i=1}^{N} k_i R_{it}) = \sum_{i} k_i \overline{R}_i, \tag{3}$$

где $\overline{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} R_{it}$.

Рискованность данного ПЦБ оценивается стандартным отклонением σ_p, вычисляемым на основе дисперсии его доходности

$$\sigma_p^2 = E(P_t - \overline{P})^2 = \sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij}, \tag{4}$$

где σ_i^2 – дисперсия доходности ЦБ i

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \overline{R}_i)^2, \tag{5}$$

σ_{ij} – ковариация между доходностью ЦБ i и j

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t} (R_{it} - \overline{R}_i)(R_{jt} - \overline{R}_j). \tag{6}$$

Соотношение между доходностью и риском портфеля обычно изучается на графике с осями $\overline{P}$ и σ_p. Нетрудно показать, что множество портфелей с минимальным риском (при заданной доходности) или с максимальной доходностью (при заданном риске) образует выпуклую кривую, типа той, что представлена на рис. 1. Эта кривая называется линией эффективных портфелей (efficient frontier). Выпуклость следует из того факта, что линейная комбинация двух портфелей также является портфелем.

Пусть норма доходов ЦБ с фиксированным процентом составляет R_F. Для этих бумаг риск равен нулю, т.е. $\sigma_F = 0$. Инвестируя капитал в ЦБ, подверженные рыночным колебаниям, мы хотим получить наилучшее соотношение между дополнительной прибылью и возрастанием риска.

Отложим на графике в пространстве $\overline{P} - \sigma_p$ точку, характеризующую ЦБ с фиксированным доходом. Это будет R_F на оси ординат (см. рис. 2).

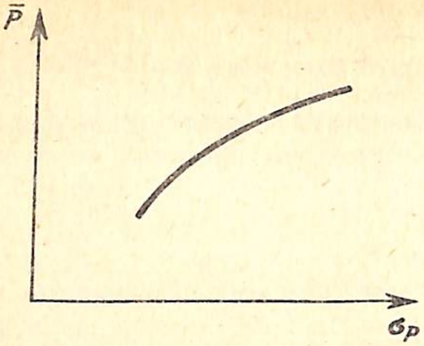

Рис. 1. Линия эффективных портфелей

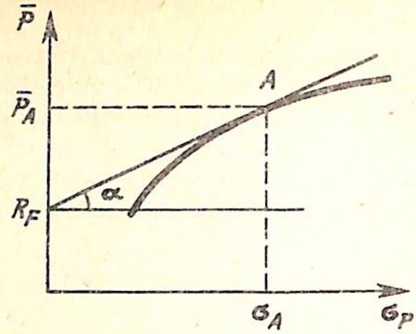

Рис. 2. Геометрическая интерпретация оптимального портфеля

Ясно, что наилучшее соотношение между приростом доходности и возрастанием риска обеспечивает ПЦБ, представленный на графике точкой A, через которую проходит касательная к линии эффективных портфелей, начинающаяся в R_F. Следовательно, оптимальной структурой ПЦБ будет та, которая соответствует точке A. Ее (см. [2]) можно найти с помощью максимизации функции

$$\theta = (\overline{P} - R_F) / \sigma_p \tag{7}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = 1, \tag{8}$$

где k_i – доля портфеля, инвестированная в ЦБ типа i.

Введем ограничения (8) в целевую функцию (7). Для этого запишем R_F как

$$R_F = 1 \;\; R_F = \left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right) R_F = \sum_{i=1}^{N} k_i R_F. \tag{9}$$

Делаем подстановку в целевую функцию

$$\theta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} k_i (\overline{R}_i - R_F)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij}\right)^{1/2}}. \tag{10}$$

Требуется найти коэффициенты k_i, максимизирующие (10).

Сделаем это с помощью обычных средств математического анализа, приравняв первые производные функции θ по искомым параметрам нулю. Получим систему N уравнений

$$\partial\theta / \partial k_i = 0, \;\; i = 1, \; \ldots, \; N. \tag{11}$$

Представим функцию θ в виде произведения двух функций

$$\theta = F_1 F_2, \tag{12}$$

где

$$F_1 = \sum_{i=1}^{N} k_i (\overline{R}_i - R_F), \tag{13}$$

$$F_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij} \right)^{-1/2}. \tag{14}$$

Тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial k_s} = F_1 \frac{\partial F_2}{\partial k_s} + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial k_s}, \tag{15}$$

где

$$\frac{\partial F_1}{\partial k_s} = \overline{R}_s - R_F, \tag{16}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial k_s} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij} \right)^{-3/2} \times \left(2 k_s \sigma_s^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{N} k_j \sigma_{js} \right). \tag{17}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \theta}{\partial k_s} = \left[\sum_{i=1}^{N} k_i (\overline{R}_i - R_F) \right] \left[-\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij} \right)^{-3/2} \left(k_s \sigma_s^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{N} k_j \sigma_{sj} \right) \right] +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij} \right]^{-1/2} (\overline{R}_s - R_F) = 0. \tag{18}$$

Умножив левую и правую части последнего равенства на

$$\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij} \right)^{1/2},$$

получим

$$-\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} k_i (\overline{R}_i - R_F)}{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \sigma_{ij}} \right] \times \left(k_s \sigma_s^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{N} k_j \sigma_{sj} \right) + (\overline{R}_s - R_F) = 0. \tag{19}$$

Легко заметить, что сомножитель в квадратных скобках является константой, поскольку все входящие в него величины постоянны. Обозначим его через λ и перепишем (19) в виде

$$-\lambda\left(k_s\sigma_s^2+\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{N}k_j\sigma_{sj}\right)+(\overline{R}_s-R_F)=0. \tag{20}$$

В (20) записана система N одновременных неоднородных уравнений для $s = 1, ..., N$, в которой $N + 1$ неизвестных: $\lambda, k_1, ..., k_N$. Введем новые переменные

$$z_s=\lambda\, k_s,\ s=1,\ldots,N. \tag{21}$$

Подставим их в (20) и получим систему N линейных неоднородных уравнений относительно z_s. Решая ее, найдем z_s, по ним вычислим

$$k_s=z_s\Big/\sum_{i=1}^{N}z_i\,, \tag{22}$$

используя (8).

Выражение (22) определяет оптимальную структуру портфеля при заданном наборе ЦБ и норме доходов R_F по ЦБ с фиксированным процентом.

Однако может так случиться, что в результате решения системы (20) часть коэффициентов k_i примет отрицательные значения. Что делать в этой ситуации?

Если на коэффициенты k_i накладываются условия

$$k_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,N, \tag{23}$$

то задача решается методами квадратического программирования. Это связано с тем, что целевая функция, которую мы максимизируем, нелинейна. Входящая в нее величина σ_p содержит члены с k_i^2 и k_ik_j. Если же условия (23) не накладываются, то отрицательное значение k_i означает, что соответствующие ЦБ нужно продать на срок без покрытия (to sell short), т.е. при отсутствии их у продавца в момент продажи. Другими словами, речь идет об игре на понижение. Отметим, что за рубежом большинство институциональных инвесторов не торгует ЦБ на срок без покрытия. А многим институтам эта операция просто запрещена законом. Тем не менее она широко используется на Нью-Йоркской и других фондовых биржах и по сути представляет собой заем.

В наиболее общем виде задача об оптимальном инвестировании в ЦБ включает в себя как заем, так и предоставление кредитов. Заем увеличивает ресурсы для инвестирования, а предоставление ссуды равносильно инвестированию под фиксированный процент. Для упрощения задачи будем считать, что получение и предоставление кредита осуществляется за один и тот же фиксированный процент R_F.

Предположим, что инвестор решил вложить часть своих средств в некоторый портфель A и, кроме того, предоставить ссуду или взять взаймы под фиксированный процент R_F. Исследуем все возможные комбинации портфеля A с предоставлением ссуды и займом.

Пусть k – доля первоначального капитала, которую инвестор разместил в виде портфеля A. Величина k может превосходить единицу, так как предполагается, что инвестор волен занять и инвестировать больше, чем имеет. Если k – доля, направленная в портфель A, то $1 - k$ должна быть долей средств, размещенных под фиксированный процент. Ожидаемый доход от комбинации портфеля с заемно-кредитной операцией определяется выражением

$$\overline{P}_c=(1-k)R_F+k\overline{P}_A. \tag{24}$$

Риск такой комбинации характеризуется величиной

$$\sigma_c = \left[(1-k)^2\sigma_F^2 + k^2\sigma_A^2 + 2k(1-k)\sigma_{AF}\right]^{1/2}, \qquad (25)$$

где $\sigma_F = 0$ и, следовательно, $\sigma_{AF} = 0$, т.е.

$$\sigma_c = k\sigma_A. \qquad (26)$$

Решая это равенство относительно k, получаем

$$k = \sigma_c/\sigma_A. \qquad (27)$$

Подстановка (27) в (24) дает

$$\overline{P}_c = \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_A}\right)R_F + \frac{\sigma_c}{\sigma_A}\overline{P}_A. \qquad (28)$$

После преобразований имеем

$$\overline{P}_c = R_F + \left(\frac{\overline{P}_A - R_F}{\sigma_A}\right)\sigma_c. \qquad (29)$$

Обратим внимание на то, что (29) – уравнение прямой. Это означает, что все комбинации портфеля A с кредитно-заемными операциями с фиксированным процентом лежат вдоль прямой в пространстве доход – риск. Прямая пересекает ось ординат на уровне R_F с коэффициентом наклона $(\overline{P}_c = R_F)/\sigma_A$, проходит через точку $(\sigma_A, \overline{P}_A)$, представляющую портфель A (см. рис. 3). Если наложить рис. 3 на рис. 2, получим рис. 4.

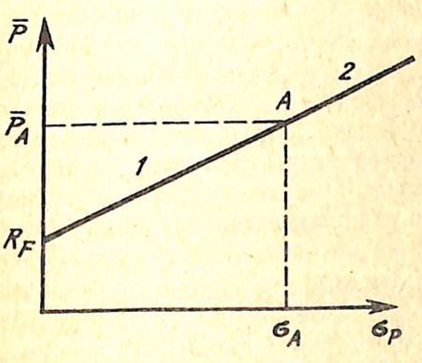

Рис. 3

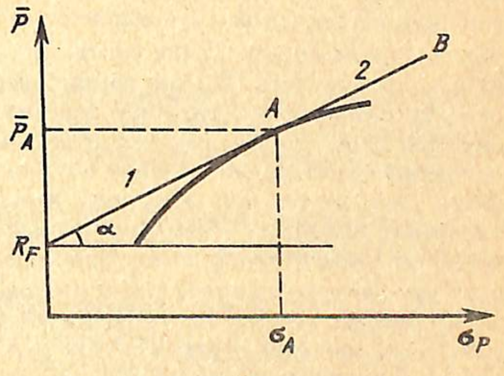

Рис. 4.

Рис. 3. Связь ожидаемого дохода с риском, когда инвестирование в портфель A сочетается с кредитно-заемными операциями: *1* – ссуда, *2* – заем

Рис. 4. Комбинация оптимального портфеля A с кредитно-заемными операциями: *1* – ссуда, *2* – заем

На рис. 4 прямая $R_F - B$ представляет собой множество оптимальных решений, характеризующихся одинаковым соотношением прироста доходности к возрастанию риска. Конкретный выбор остается за инвестором и зависит от его склонности к риску. Отрезок $R_F - A$ отражает решения инвестировать одну часть средств в портфель A, а другую отдать в виде ссуды под фиксированный процент R_F. Вдоль отрезка $A - B$ лежат решения о том, чтобы взять взаймы дополнительные средства и весь суммарный капитал инвестировать в портфель A. Таким образом, в любом случае отыскание точки A является решением проблемы оптимизации структуры портфеля.

Теперь обратим внимание на уравнения (20). Их вид позволяет выразить z_s из (21) как линейную функцию от R_F

$$z_s = C_s + D_s R_F, \tag{30}$$

где C_s и D_s – константы, имеющие различные, но не зависящие от R_F значения для каждой ЦБ s. Тогда, если знать коэффициенты C_s и D_s, можно, варьируя R_F, получать z_s, а через них и k_s для точек, лежащих на линии эффективных портфелей. Это дает возможность построить всю линию эффективных портфелей в пространстве "доходность – риск", используя (3), (4).

Постоянные коэффициенты C_s и D_s найти нетрудно. Для этого достаточно решить задачу относительно z_s при двух разных значениях R_F

$$D_s = \frac{z_s^{(1)} - z_s^{(2)}}{R_F^{(1)} - R_F^{(2)}}, \tag{31}$$

$$C_s = z_s^{(1)} - D_s R_F^{(1)}, \tag{32}$$

где индекс (1) означает "при первом значении R_F", а (2) – "при втором".

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕРЫ РИСКА

Применение классических подходов к анализу структуры ПЦБ не является единственно возможным способом решения задачи. Вряд ли его можно считать и наилучшим. Он основывается на предположении, что доходность ЦБ имеет неизменное математическое ожидание и колебания относительно него характеризуются стабильной величиной – стандартным отклонением. Эти допущения в общем случае вряд ли правомерны. Такие статистические показатели временно́го ряда, описывающего доходность ЦБ, как средний уровень, дисперсия ряда или ковариация двух рядов не отражают каких-либо действительно устойчивых характеристик ряда, а являются лишь формально рассчитанными величинами. В реальности уровень ряда постоянно меняется, какой-либо постоянной дисперсии или ковариации также нет. Кроме того, до сих пор молчаливо использовалась гипотеза о том, что колебания доходности портфеля в обе стороны одинаково нежелательны. Очевидно, это противоречит элементарной логике экономической жизни. Владелец ЦБ, разумеется, не будет протестовать против роста их доходности. Его не устраивает лишь ее падение. И именно эта опасность (вероятность и глубина) является тем риском, который беспокоит инвестора, поэтому для последовательной реализации указанных идей в практической плоскости мы предлагаем несколько альтернативных мер риска.

Средний квадрат приращений. Учитывая нестационарность исследуемых временны́х рядов доходности ЦБ, возьмем в качестве измерителя их колеблемости корень квадратный из среднего квадрата приращений. Этот показатель построен на основе отклонений ряда в момент t от уровня, достигнутого им в предыдущий момент $t-1$. В нем не используются математическое ожидание ряда и гипотеза о его постоянстве, поэтому он представляется нам более адекватным своему предназначению (подробнее см. [4]). Минимальный риск портфеля будут обеспечивать те ЦБ, совокупность которых характеризуется наименьшей колеблемостью.

Если доходность портфеля в момент t равна

$$P_t = \sum_{i=1}^{N} k_i R_{it}, \tag{33}$$

то средний квадрат приростов (колебаний) доходности портфеля выражается так

$$w^2 = \overline{\Delta P_t^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(P_t - P_{t-1})^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{N} k_i (R_{it} - R_{i,t-1})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{N} k_i^2 (\Delta R_{it})^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k_i k_j \Delta R_{it}\Delta R_{jt}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} k_i^2 \overline{\Delta R_i^2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k_i k_j \overline{\Delta R_i \Delta R_j}, \tag{34}$$

где $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$,

$\Delta R_{it} = R_{it} - R_{i,t-1}$,

а черта сверху означает усреднение по времени.

Далее в соответствии с поставленной задачей требуется найти такую структуру инвестиций (т.е. коэффициенты k_i), которая обеспечит наиболее благоприятное соотношение между приростом средней доходности и возросшим риском. Функция, которую следует максимизировать, принимает вид

$$\varphi = \frac{\overline{P} - P_F}{w} = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i (\overline{R}_i - R_F)}{\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \overline{\Delta R_i^2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k_i k_j \overline{\Delta R_i \Delta R_j}\right)^{1/2}}. \tag{35}$$

Она совершенно аналогична функции θ, представленной в (10), и поиск оптимальных значений констант k_i осуществляется так же, как и раньше, решением системы линейных неоднородных уравнений и нормализацией полученных результатов с тем, чтобы в сумме они давали единицу.

Отметим, что в (34) квадраты положительных и отрицательных приростов учитываются одинаково, т.е. отклонения в обе стороны все еще считаются равно нежелательными.

Экспоненциально взвешенная сумма квадратов приращений. Предыдущий показатель риска портфеля не связан с математическим ожиданием доходности, и это положительно. Тем не менее он содержит операцию усреднения по времени, а использование средних величин предполагает их устойчивость. Однако для гипотезы об их постоянстве на всем выборочном интервале нет оснований, и в этом слабость меры (34). В какой-то степени устранить этот недостаток можно, исходя из следующих рассуждений.

Усреднение квадратов приращений и их попарных произведений осуществляется на определенном временно́м интервале – выборке. При движении по оси времени этот интервал усреднения так же можно сдвигать, оставляя его ширину (окно) постоянной. Получаем процедуру усреднения, аналогичную вычислению скользящего среднего. Таким образом, переходя от момента t к $t - 1$, получаем обновленные оценки средних квадратов приращений и их попарных произведений. Если теперь и в числителе (35) также обновлять средние, сдвигая интервал усреднения, то на основе новых оценок средних можно получить скорректированные значения структурных коэффициентов портфеля k_i. Подправление коэффициентов k_i во времени имеет целью непрерывно оптимизировать структуру портфеля с учетом изменений в динамике доходности ЦБ. Однако в рассмотренной здесь процедуре имеется существенный недостаток: исходные данные, входящие в "окно" усреднения, учитываются с одинаковым весом, а вес остальных наблюдений приравнен нулю. Очевидно, более логичным было бы постепенно и непрерывно снижать вес данных с учетом их устаревания. Исходя из этой идеи, предложим еще одну процедуру оптимизации структуры портфеля, использующую экспоненциально падающие веса.

В качестве меры риска ПЦБ в момент t возьмем корень квадратный из экспоненциально взвешенной суммы квадратов приращений его стоимости, рассчитанной по данным, соответствующим моментам времени от 1 до t.

Построим целевую функцию

$$\gamma_t = C_t / g_t, \tag{36}$$

аналогичную (35), но отличающуюся тем, что ее числитель и знаменатель корректируются при каждом увеличении t на единицу с учетом устаревания прежних наблюдений.

Рассмотрим числитель. Процедура экспоненциального взвешивания означает, что средний прирост доходности на момент t определяется так

$$C_t = \alpha \sum_{m=0}^{t-1} \beta^m \sum_i k_i (R_{i,t-m} - R_F), \tag{37}$$

где $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$; $\beta = 1 - \alpha$.

Преобразуем это выражение

$$C_t = \sum_i k_i \left(\alpha \sum_{m=0}^{t-1} \beta_m R_{i,t-m} - R_F \alpha \sum_{m=0}^{t-1} \beta^m \right). \tag{38}$$

Величина $\alpha \sum_{m=0}^{t-1} \beta^m R_{i,t-m}$ является экспоненциальной средней доходности ЦБ i в момент t. Обозначим ее через

$$\overline{\overline{R_{it}}}(\alpha) = \alpha \sum_{m=0}^{t-1} \beta^m R_{i,t-m}. \tag{39}$$

Известно [5], что экспоненциальную среднюю можно вычислять рекуррентно по формуле

$$\overline{\overline{R_{it}(\alpha)}} = \beta \overline{\overline{R_{i,t-1}(\alpha)}} + \alpha R_{it}. \tag{40}$$

Учитывая такое, что при $t \to \infty$ коэффициент при R_F

$$\alpha \sum_{m=0}^{t-1} \beta^m \to 1, \tag{41}$$

можем переписать (38) в виде

$$C_t = \sum_i k_i \left[\overline{\overline{R_{it}(\alpha)}} - R_F \right]. \tag{42}$$

Теперь рассмотрим знаменатель целевой функции (36). Его также будем обновлять с учетом устаревания информации и, естественно, наблюдения, используемые в числителе и знаменателе, должны обесцениваться (дисконтироваться) одинаково для того, чтобы сбалансировать темпы обновления числителя и знаменателя. Однако здесь возникает серьезная проблема. Дело в том, что в числителе усредняются непосредственно линейные меры доходности, а в знаменателе сначала линейные меры преобразуются в кадратические и именно они и усредняются, а уже затем, извлекая из их суммы корень квадратный, вновь возвращаются к линейной мере. Поэтому требуется как-то согласовать дисконтирование наблюдений в числителе и в знаменателе. Предлагаем сделать это следующим образом.

Запишем сначала экспоненциальную среднюю квадратов приростов на момент t

$$g_t^2 = \alpha_1 \sum_{m=0}^{t-1} (\beta_1)^m (P_t - P_{t-1})^2 = \sum_{i=1}^{N} k_i^2 \overline{\overline{\Delta R_{it}^2(\alpha_1)}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \times \overline{\overline{\Delta R_{it} \Delta R_{jt}(\alpha_1)}}, \tag{43}$$

где $0 < \alpha_1 < 1$; $\beta_1 = 1 - \alpha_1$, а двойная черта над символом означает экспоненциальную среднюю соответствующего показателя.

Для согласования α_1 и α, определяющих весовые функции для наблюдений, будем в числителе и в знаменателе дисконтировать одинаково линейные меры. Другими словами, если в числителе коэффициент дисконтирования равен β, то и в знаменателе для линейной меры он тоже будет β. Это означает, что квадратичная мера будет тогда дисконтироваться коэффициентом β^2, т.е. $\beta_1 = \beta^2$ или

$$(1 - \alpha_1) = (1 - \alpha)^2. \tag{44}$$

С учетом этого перепишем (43)

$$g_t^2 = [1 - (1 - \alpha)^2] \sum_{m=0}^{t-1} (1 - \alpha)^{2m} (P_t - P_{t-1})^2. \tag{45}$$

В итоге целевая функция в момент t принимает вид

$$\gamma_t(\alpha) = \frac{\overline{\overline{P_t(\alpha)}} - R_F}{g_t(\alpha)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i [\overline{\overline{R_{it}(\alpha)}} - R_F}{\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \overline{\overline{\Delta R_{it}^2(\alpha_1)}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k_i k_j \overline{\overline{\Delta R_{it} \Delta R_{jt}(\alpha_1)}} \right)^{1/2}}, \tag{46}$$

где α и α_1 связаны соотношением (44). Если параметр адаптации α задан, то эта функция зависит только от коэффициентов k_i. Она совершенно аналогична (10) и (35) и оптимальные значения коэффициентов k_i в момент t отыскиваются так же, как и раньше. Различие в том что экспоненциальные средние корректируются при каждом увеличении t на единицу, и целевая функция (46) обновляется на каждом шаге продвижения по оси времени. Соответственно модифицируются и оценки структурных коэффициентов k_i. Поэтому рассмотренную процедуру можно назвать адаптивной оптимизацией структуры портфеля.

Адаптация к новой ситуации на рынке ЦБ – безусловно положительное качество получаемых оценок. Недостаток же их в том, что отрицательные и положительные приросты доходности учитываются все еще одинаково. Кроме того, в этой процедуре параметр экспоненциального сглаживания α, который мы также называем параметром адаптации, остается неизвестным, неопределенным. Можно либо задать его экспертно, либо найти его оптимальное значение, пользуясь тем или иным критерием эффективности управления портфелем ценных бумаг (см. разд. 4).

Средние потери в доходности портфеля. До сих пор, определяя риск ПЦБ, мы фактически считали одинаково нежелательными как отрицательные, так и положительные флуктуации доходности портфеля. На гипотетическом примере покажем, что такой подход может приводить к абсурду.

Предположим, что доходность всех ЦБ, входящих в портфель, монотонно растет на всем интервале выборки. На деле это означает, что риск потерь для этого портфеля оказался равным нулю. Если же формально применить, например, классический подход, рассмотренный в разд. 2, то дисперсия отклонений от среднего (а следовательно, и стандартное отклонение – мера риска) будет тем выше, чем выше темпы роста доходности. Таким образом, самые доходные ценные бумаги будут получать заниженный вес и могут быть даже вовсе исключены из портфеля. Такая же ситуация возможна и с другими рассмотренными показателями риска, использующими приросты доходности. Спасает положение то, что подобная ситуация мало вероятна, и колебания в обе стороны часто примерно симметричны. Тем не менее она вскрывает пороки измерителей риска. Попробуем, исходя из данных рассуждений, избавиться от указанного недостатка.

Будем считать, что нежелательны лишь отрицательные флуктуации доходности портфеля. Встав на эту, вполне естественную точку зрения, полагаем, что опасность такого снижения исходит в момент t от тех ЦБ, у которых наблюдается падение доходности. Риск для портфеля от ЦБ i, характеризующейся снижением доходности ΔR_{it}, равен $k_i|\Delta R_{it}|$. Средний риск для портфеля за весь интервал выборки составит

$$r = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\in w_i} k_i|\Delta R_{it}| = -\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\in w_i} i_{it}\Delta R_{it}, \tag{47}$$

где w_i – множество тех t, для которых $\Delta R_{it} < 0$.

Целевую функцию построим как отношение среднего прироста доходности портфеля к среднему риску, т.е.

$$\eta = -\frac{\sum_{i=1}^{N} k_i(\overline{R}_i - R_F)}{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\in w_i} k_i\Delta R_{it}}. \tag{48}$$

Требуется найти такие коэффициенты k_i, $i = 1, ..., N$, которые максимизируют целевую функцию. Действуя так же, как и в разд. 2, приравняем первые производные функции η по k_s нулю и получим N одновременных уравнений для $s = 1, ..., N$

$$\sum_{i=1}^{N} k_i(\overline{R}_i - R_F)\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\in w_i} k_i\Delta R_{it}}\right]\sum_{t\in w_s}\Delta R_{st} - (\overline{R}_s - R_F) = 0. \tag{49}$$

Обозначим через λ сомножитель в квадратных скобках. Он является константой. Тогда (49) преобразуется в систему N линейных неоднородных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} z_i(\overline{R}_i - R_F)\sum_{t\in w_s}\Delta R_{st} - (\overline{R}_s - R_F) = 0 \tag{50}$$

относительно z_i, $i = 1, ..., N$, где

$$z_i = \lambda k_i. \tag{51}$$

Эта система решается стандартным образом. По найденным значениям z_i определяются величины k_i на основе условия нормализации

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = 1. \tag{52}$$

Тогда

$$k_s = z_s \Big/ \sum_{i=1}^{N} z_i, \quad s = 1, ..., N. \tag{53}$$

Отметим, что первоначально кандидатами в портфель целесообразно отбирать те ЦБ, у которых величина

$$q_i = \frac{\overline{R}_i - R_F}{\frac{1}{T}\sum_{t \in w_i} \Delta R_{it}}, \ i = 1, \ \dots, \ N, \dots \tag{54}$$

принимает наиболее высокие значения, т.е. q_i выступает в качестве показателя, по которому предварительно ранжируются ЦБ по их полезности в портфеле.

Нетрудно построить и адаптивный вариант целевой функции (48) путем замены в числителе и знаменателе арифметического усреднения по времени усреднением с экспоненциальным взвешиванием. При этом в числителе и знаменателе будет один и тот же коэффициент дисконтирования, так как в обоих случаях речь идет о сглаживании линейных мер.

4. КРИТЕРИЙ СРАВНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Каждый из критериев (10), (35), (46), (48), применявшихся для получения оценок структурных параметров k_i, отражает тот или иной принцип использования (учета) данных, накопленных за прошлый период времени. И каждый из них лежит в основе соответствующей процедуры (методологии) оптимизации структуры портфеля ценных бумаг. Теперь возникает вопрос, какой из этих принципов более адекватен поставленной задаче. Другими словами, требуется критерий сравнения эффективности различных методов управления структурой портфеля ценных бумаг. Таким критерием за весь выборочный период предлагаем взять

$$Q = \sum_t \sum_i k_{i,t-1}(R_{it} - R_{i,t-1}), \tag{55}$$

показывающий суммарный выигрыш (если Q положительно) или суммарные потери (если Q отрицательно) владельца ПЦБ за весь рассматриваемый период, являющиеся следствием колебания курсов ЦБ и выбора данной методологии управления структурой портфеля. Для сравнения нескольких способов управления портфелем требуется лишь сопоставить величины Q, полученные на одной и той же выборке при альтернативных методологиях. Оптимальное значение параметра адаптации α (или коэффициента дисконтирования $\beta = 1 - \alpha$) можно найти путем максимизации $Q(\alpha)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг является одной из классических задач. Впервые эта проблема была поставлена и решена в [1]. Затем появилось несколько десятков работ, с библиографией которых можно познакомиться, например, в [2]. Но во всех исследованиях эта задача решается классическими статистическими методами.

В статье предложен ряд новых подходов, основывающихся на альтернативных мерах риска. В одном риск измеряется корнем квадратным из среднего квадрата приращений совокупной стоимости портфеля. Этот показатель, с нашей точки зрения, более объективно характеризует нестационарные колебания стоимости портфеля, чем стандартное отклонение от "среднего", принятое в классическом подходе. В другом в качестве меры риска используется корень квадратный из экспоненциально взвешенной суммы квадратов приращений стоимости портфеля. Этот подход может быть назван адаптивной оптимизацией структуры портфеля. В третьем методе риск связывается только с падением доходности входящих в портфель ценных бумаг, а не с общей колеблемостью их доходности.

Сравнение эффективности различных подходов в каждом случае может быть выполнено путем сопоставления конечных результатов управления портфелем – изменений его совокупной стоимости при гипотетическом или реальном управлении его структурой тем или иным способом за весь выборочный период. Эффективность управления портфелем может быть повышена, если удастся построить хороший предиктор хотя бы знаков прироста доходности ЦБ (см. [4 – 8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. N.Y.: John Wiley and Sons, 1959.
2. *Elton E.J., Gruber M.J.* Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. N.Y.: John Wiley and Sons, 1987.
3. *Shim J.K., Siegel J.G.* Handbook of Financial Analysis, Forecasting and Modelling. N.J.: Prentice-Hall, 1988.
4. *Лукашин Ю.П.* Нетрадиционный корреляционный анализ временных рядов // Экономика и мат. методы. 1992. Т. 28. Вып. 3.
5. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования.М.: Статистика, 1979.
6. *Лукашин Ю.П.* О возможности краткосрочного прогнозирования курсов валют с помощью простейших статистических моделей // Вестн. МГУ. Сер. 6. Экономика. 1990. № 1.
7. *Лукашин Ю.П.* Линейная регрессия с переменными параметрами. М.: Финансы и статистика, 1992.
8. *Лукашин Ю.П., Лушин А.С.* Статистическое моделирование торгов на Московской межбанковской валютной бирже // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. Вып. 3.

Поступила в редакцию
12 VIII 1992