

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ: ПРОБЛЕМЫ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

© 1995 г. Фомин А.С.

(Москва)

Предложена модель ценообразования, определяющая такой размер вложений в разработку системы массового обслуживания, при котором разработчику обеспечивается максимальная прибыль, а заказчику – максимальное сохранение бюджета.

С целью строгого обоснования размеров вложений в разработку системы массового обслуживания (СМО) в [1] предложена модель ценообразования, отражающая не только интересы заказчика и разработчика, но и отношения между ними. Согласно этой модели процесс производства услуг разбивается на два этапа – производство средств производства (собственно разработка СМО) и производство услуг с помощью СМО. Предполагается, что взаимодействие между заказчиком (потребителем услуг) и разработчиком (их производителем) основано на отношениях купли-продажи как на рынке ресурса, так и на рынке услуг. В этом случае уровень ресурса с точностью до его цены (на рынке ресурса) определяет стоимость СМО. Предложение услуги – количество заявок, которые могут быть удовлетворены СМО при уровне ресурса, обеспечивающем максимальную прибыль разработчику, когда цена обслуживания фиксирована. Спрос на услуги – максимальное количество обслуженных заявок, которые могут быть оплачены заказчиком. Из условия равновесия на рынке услуг (равенства спроса и предложения) находится равновесная цена обслуживания. После этого стоимость разрабатываемой СМО определяется величиной спроса на ресурс, который обеспечивает максимальную прибыль разработчику при равновесной цене обслуживания одной заявки. Таким образом, равновесная цена обслуживания и стоимость разработки определяются согласованием интересов (сделкой) заказчика и разработчика на рынке услуг.

В данной работе интересы заказчика описываются его бюджетом с учетом экономического ущерба от возможного некачественного обслуживания разрабатываемой СМО. При определении цены обслуживания и стоимости разработки каждая сторона придерживается собственных интересов: разработчик стремится максимизировать свою прибыль, а заказчик – сохранить максимальным свой бюджет.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $M_A(v)$ – качество обслуживания разрабатываемой СМО: математическое ожидание числа заявок, которые могут быть обслужены при условии, что на ее входе будет поток заявок с параметрами $\Lambda = \Lambda(\lambda, N)$, где λ – интенсивность потока; N – количество заявок; v – интенсивность обслуживания. Предполагается, что эта функция положительна, строго монотонно возрастает и вогнута, т.е. экономически обладает всеми свойствами производственной функции полезного эффекта (ПФПЭ) от обслуживания разрабатываемой СМО потока заявок с уровнем производственного ресурса v . Этот ресурс находится в распоряжении потребителя. Производитель услуг и потребитель состоят в рыночных отношениях купли-продажи. Пусть p – цена единицы полезного эффекта, в данном случае цена обслуживания одной заявки. Для

предоставления услуг производитель покупает у потребителя v по цене c за единицу. Таким образом, величина cv определяет стоимость ресурса, используемого при разработке СМО, т.е. стоимость разработки СМО. Заметим, что при фиксированной цене ресурса стоимость разработки определяется уровнем используемого ресурса. Располагая ресурсом v , производитель при обслуживании потока заявок может предоставить услуги на сумму $pM_{\Lambda}(v)$, обеспечив себе прибыль в размере

$$u(v, p) = pM_{\Lambda}(v) - cv. \quad (1)$$

Перейдем к описанию экономических интересов заказчика (потребителя услуг). Пусть D – запас денег заказчика на потребление. Будем считать, что в случае невыполнения какой-либо заявки потребитель несет экономический ущерб. Обозначим через p_0 – экономический ущерб от пропуска одной заявки. Тогда после выделения v единиц ресурса на построение СМО и выручки денег от использования производителем ресурса v бюджет заказчика станет равным

$$v(v, p) = D + cv - pM_{\Lambda}(v) - P_0(N - M_{\Lambda}(v)), \quad (2)$$

где второй член – выручка потребителя от продажи производителю ресурса v ; третий – расходы потребителя на обслуживание $M_{\Lambda}(v)$ заявок; последний – экономический ущерб от пропуска $N - M_{\Lambda}(v)$ заявок. В результате такого производства услуг производитель стремится увеличить свою прибыль (1), а потребитель – сохранить максимальным бюджет (2). Будем считать, что разрабатываемая система представляет собой одноканальную СМО с отказами, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ – средним количеством заявок в единицу времени. Интервал времени T между заявками в этом потоке – случайная величина, распределенная по показательному закону: $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$.

Обслуживание заявки продолжается в течение случайного времени t_0 , распределенного по показательному закону с параметром v : $f_0(t) = v \exp(-vt)$, $t > 0$.

Из теории массового обслуживания известно [2], что в стационарном случае вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t , будет обслужена, равна

$$q = v / (\lambda + v). \quad (3)$$

Выражение (3) определяет относительную пропускную способность разрабатываемой СМО. Следовательно, при поступлении N заявок на входе на выходе СМО окажется

$$M_{\Lambda}(v) = Nq = Nv / (\lambda + v) \quad (4)$$

обслуженных заявок, где $\Lambda = \Lambda(\lambda, N)$ – параметры входного потока заявок. Уравнение (4) показывает качество обслуживания разрабатываемой СМО – ожидаемое число обслуженных заявок на выходе СМО, если на вход поступает N заявок с интенсивностью λ . Нетрудно видеть, что функция $M_{\Lambda}(v)$ положительна, строго монотонно возрастает и вогнута, т.е. обладает всеми свойствами ПФПЭ при обслуживании СМО потока заявок Λ с уровнем ресурса v .

Введем обозначения: (v, p) – политика ценообразования, где $(v, p) \in X$; X – допустимое множество политик; p – цена обслуживания; v – уровень ресурса, используемого при разработке СМО.

Задача состоит в том, чтобы найти такую политику (v, p) , которая в некотором смысле максимизирует обе функции выигрыша. Другими словами, частные критерии $u(v, p)$, $v(v, p)$ в совокупности составляют векторный критерий

$$G(v, p) = (u(v, p), v(v, p)), \quad (5)$$

подлежащий максимизации при условии $(v, p) \in X$. Идеальным решением является такое, которое принадлежит пересечению множеств оптимальных решений обеих од-

нокритериальных задач, т.е.

$$\arg \max u(v, p) \cap \arg \max v(v, p), (v, p) \in X. \quad (6)$$

Заметим, что скаляризация критерия (5) с помощью леммы Карлина [3] здесь невозможна, так как оптимизируемые функции не являются вогнутыми. Наша задача – выяснить условия, при которых множество идеальных решений не пусто, и найти эти решения. Благодаря выявленным свойствам введенных функций полезности и допустимого множества решить задачу можно последовательным сужением допустимой области.

ПОЛИТИКА ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ, ПРИЕМЛЕМАЯ ДЛЯ РАЗРАБОТЧИКА

Рассмотрим допустимое множество

$$X_1 = \{v, p | 0 \leq v \leq v_0, \quad 0 \leq p \leq p_0\}, \quad (7)$$

образованное наложением ограничения сверху v_0 на величину ресурса обслуживания и p_0 на цену обслуживания, где v_0 – запас производственного ресурса у потребителя, p_0 – экономический ущерб от пропуска одной заявки. Оценим возможность максимизации прибыли производителя услуг

$$\max u(v, p), (v, p) \in X_1, \quad (8)$$

где $u(v, P)$ определена по (1).

Можно показать, что функция $u(v, P)$ не является вогнутой, тем не менее, по известной теореме [4], наибольшее значение ее существует, так как допустимое множество X_1 замкнуто и ограничено. Кроме того, нетрудно видеть, что при любом p функция $u(v, p)$ строго вогнута по v . Следовательно, значение $v(p)$ максимизирующее (1) при некотором p , существует и единственно на всей вещественной оси, причем оно может принадлежать множеству X_1 , а может и не принадлежать. Нетрудно показать, что это решение имеет вид

$$v(p) = (p\lambda N / c)^{1/2} - \lambda, \quad (9)$$

и допустимо тогда, когда $0 \leq v(p) \leq v_0$, что приводит к дополнительным ограничениям на цену обслуживания вида

$$p_m \leq p \leq p_M, \quad (10)$$

где

$$p_m = \lambda c / N \quad (11)$$

– минимальная цена обслуживания, вызванная требованием неотрицательности ресурса и определяемая стоимостью ресурса входного потока заявок, приходящейся на одну поступающую заявку, т.е. удельной стоимостью ресурса входного потока заявок

$$p_M = p_m (1 + v_0 / \lambda)^2 \quad (12)$$

– максимальная цена обслуживания, вызванная требованием ограниченности ресурса величиной v_0 и отличающаяся от минимальной цены множителем, зависящим от отношения максимальной интенсивности обслуживания к интенсивности входного потока заявок. Неравенства (10) указывают диапазон цен, при которых оптимальное значение $v(p)$ лежит внутри либо на границе допустимого множества. Далее нас будет интересовать именно этот случай, т.е. вместо множества X_1 мы будем рассматривать допустимое множество

$$X_2 = \{v, p | 0 \leq v \leq v_0, \quad p_m \leq p \leq p_M\}, \quad (13)$$

образованное дополнением множества X_1 ограничениями (10), где

$$p \sim = \min\{p_M, p_0\}. \quad (14)$$

Тогда задача (8) сводится к следующей

$$\max U(p), \quad p_m \leq p \leq p \sim, \quad (15)$$

где $U(p) = u(v(p), p)$ – оптимальное значение функции $u(v, p)$ по v .

Можно показать, что монотонное возрастание функции $U(p)$ вытекает из неотрицательности ее производной.

Из монотонности оптимизируемой функции в (15) следует, что оптимальное значение цены обслуживания равно $p \sim$, а соответствующая ей величина оптимального ресурса $-v(p \sim)$, где $p \sim$ определяется по (14). Тем самым показано, что

$$\arg \max u(v, p) = (v(p \sim), p \sim), (v, p) \in X_2. \quad (16)$$

Выше было замечено, что v_0 вызвано прямым ограничением сверху на ресурс обслуживания. Из (14), (16) видно, что оптимальная политика ценообразования производителя зависит от того, какое из двух ограничений на цену обслуживания является доминирующим – прямое ограничение сверху на ресурс или экономический ущерб от пропуска одной заявки. Если доминирующим служит прямое ограничение сверху на ресурс: $p_M \leq p_0$, то $p \sim = p_M$. Это означает, что при разработке СМО производитель заинтересован в использовании всего ресурса v_0 с последующей продажей услуг потребителю по максимальной цене p_M . Если доминирующее ограничение на цену обслуживания – экономический ущерб от пропуска одной заявки: $p_0 \leq p_M$, то $p \sim = p_0$. Это значит, что при разработке СМО производитель заинтересован в использовании части ресурса $v(p_0) \leq v_0$ с последующей продажей услуг потребителю по цене p_0 .

ПОЛИТИКА ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ, ПРИЕМЛЕМАЯ ДЛЯ ЗАКАЗЧИКА

Перейдем к максимизации функции полезности потребителя услуг $\max u(v, p)$, $(v, p) \in X_2$. Для этого представим функцию полезности заказчика в виде

$$u(v, p) = (p_0 - p)M_\Lambda(v) + cv + D - p_0N. \quad (17)$$

Так как $p_0 \geq p$ на множестве X_2 , а $M_\Lambda(v)$ и cv – строго монотонно возрастающие функции, то $\max u(v, p) = u(v_0, p)$, $0 \leq v \leq v_0$. Дальнейшая максимизация по p , как видно из (17), дает $\max u(v_0, p) = u(v_0, p_m)$, $p_m \leq p \leq p_M$, что означает

$$\arg \max u(v, p) = (v_0, p_m), (v, p) \in X_2. \quad (18)$$

Отсюда видно, что при разработке СМО оптимальная политика ценообразования потребителя так же, как и для производителя в случае доминирования v_0 , предполагает максимальное использование ресурса, но с покупкой услуг разрабатываемой системы по минимальной цене. Из (16), (18) ясно, что пересечение множеств оптимальных решений производителя и потребителя на множестве X_2 в этом случае пусто, следовательно, решение может быть только компромиссным.

ИДЕАЛЬНАЯ ПОЛИТИКА ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Перейдем к поиску идеального решения. Для этого будем предполагать, что варьирование ресурса происходит в пределах не всего запаса v_0 , а только его части $v(p) \leq v_0$, максимизирующей прибыль производителя при некотором значении цены обслуживания p и определяемой по (9). Далее из множества X_2 выделим подмножество $X_3 = \{v, p \mid 0 \leq v \leq v(p), p_m \leq p \leq p \sim\}$ и рассмотрим оптимальные решения

производителя и потребителя на этом подмножестве. Как и при выводе (16), нетрудно показать, что

$$\arg \max u(v, p) = (v(p \sim), p \sim), (v, p) \in X_3, \quad (19)$$

т.е. оптимальное решение производителя на подмножестве X_3 совпадает с аналогичным решением на множестве X_2 .

Перейдем к поиску оптимального решения потребителя. Из монотонности функции полезности потребителя по ресурсу следует, что при фиксированной цене обслуживания оптимальная по ресурсу полезность потребителя равна $V(p) = \max v(v, p) = v(v(p), p)$. Следовательно, поиск оптимального решения потребителя сводится к решению задачи

$$\max V(p), p_m \leq p \leq p \sim. \quad (20)$$

Подставляя $v(p)$ в (17), получаем явное выражение для оптимального значения функции полезности заказчика по ресурсу

$$V(p) = D - \lambda c(p/p_m - 1)^2 - p_0 N(p/p_m)^{1/2}. \quad (21)$$

Можно показать, что при $p, p_0, p_m > 0$ функция $V(p)$ строго вогнута. Значит, на всей положительной полуоси максимум функции (21) существует и достигается в стационарной точке p_3 , определяемой из уравнения $V'(p) = 0$, где штрихом обозначена производная по p . Это уравнение сводится к кубическому относительно $(p/p_m)^{1/2}$. Его действительный корень, вычисляемый с помощью формул Кардана [5], равен

$$\begin{aligned} \sqrt{p_3} &= \sqrt{p_m} g(e) / 3, \\ g(e) &= 1 + \sqrt[3]{e + \sqrt{e^2 - 1}} + \sqrt[3]{e - \sqrt{e^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$e = e(r) = 1 + 27r/4,$$

$$r = p_0 / p_m = p_0 N / \lambda c,$$

где r — отношение экономического ущерба от пропуска всех заявок к стоимости входного потока заявок — относительный экономический ущерб от пропуска всех заявок.

Так как функция $V(p)$ достигает своего экстремума или в стационарной точке, или в точке границы области, то ограничения на цену обслуживания, фигурирующие в (20), необходимо заменить на неравенства

$$p_m \leq p \leq p_3 \sim, \quad (23)$$

где

$$p_3 \sim = \min\{p \sim, p_3\} = \min\{p_M, p_0, p_3\} \quad (24)$$

в соответствии с (14).

Определим допустимое множество $X_4 = \{v, p \mid 0 \leq v \leq v(p), p_m \leq p \leq p_3 \sim\}$. Из (23) и (24) следует: $X_4 \subseteq X_3$. Можно показать, что допустимое множество X_4 примечательно тем, что в нем существует идеальное решение задачи максимизации векторного критерия (5), т.е. при $(v, p) \in X_4$

$$\arg \max u(v, p) \cap \arg \max v(v, p) = (v(p_3 \sim), p_3 \sim), \quad (25)$$

где $p_3 \sim$ — рассчитывается по (24).

Таким образом, прямые ограничения сверху на ресурс и цену обслуживания создают условия для существования идеальной политики ценообразования (25). А она утверждает, что если при разработке СМО заказчик будет ориентироваться на цену обслуживания $p \sim$, то СМО обойдется ему в сумму $cv(p_3 \sim)$. Такая политика ценообразования при производстве СМО обеспечивает разработчику максимальную прибыль (1), а заказчику — максимальное сохранение бюджета (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин А.С.* Равновесная модель ценообразования при разработке системы массового обслуживания // Экономика и мат. методы. 1993. Т. XXIX. Вып. 3.
2. *Гиеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
3. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1967.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 1.
5. *Корн Г.* Справочник по математике: М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию
22 IV 1994