

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ЧЕРЕЗ ВНЕШНЕЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ*

© 1995 г. Булавский В.А.

(Москва)

На примере динамической модели Леонтьева с непрерывным временем обсуждается возможность использования внешнего потребления (нагрузки модели) в качестве управления. Цель такого управления – стабилизация экономики вдоль желаемой траектории сбалансированного роста, а также выход на нее. Рассмотрены примеры управления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теоретические аспекты экономической динамики изучены достаточно широко и обстоятельно. После основополагающих работ В.В. Леонтьева [1], Дж. фон Неймана [2], Д. Гейла [3] был развит мощный аппарат, трактующий задачи экономической динамики в весьма общей форме. Главное внимание уделялось вопросам сбалансированного роста, эффективности траекторий и их магистральным свойствам. Укажем в связи с этим на [4–8]. В данной статье на примере классической динамической системы Леонтьева (см., например, [6]) с непрерывным временем иллюстрируется возможность управления динамикой модели с помощью внешнего потребления.

Рассматриваемая динамическая модель может быть описана в следующей форме. Пусть имеется n отраслей, выпускающих однородные продукты. Текущее состояние системы в каждый момент времени t характеризуется производственными мощностями $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Внутренними параметрами модели являются текущие затраты a_{ij} продукта i на изготовление единицы продукта j , а также коэффициенты инвестиционных затрат b_{ij} , показывающие, сколько нужно продукта i для увеличения мощности отрасли j на единицу. Коэффициенты a_{ij} и b_{ij} , как обычно, образуют матрицу A коэффициентов текущих и матрицу B инвестиционных затрат. Обе матрицы имеют размеры $n \times n$. В модели будет фигурировать также внешнее потребление, обозначаемое набором переменных $u_1(t), \dots, u_n(t)$. Переменные $x_j(t)$ и $u_i(t)$ организуются в вектор-столбцы $x(t)$ и $u(t)$. Аналогично в вектор-столбцы будут собираться и все другие переменные, имеющие смысл скоростей производства или потребления продуктов. Напротив, переменные оценочного или ценового характера трактуются как вектор-строки. Таким образом, знак транспонирования не применяется, а штрих сверху у переменной означает производную по времени, например $x'(t)$. Наконец, указание явной зависимости от времени опускается, за исключением случаев, где оно необходимо.

Рассматриваются режимы, в которых продукты не уничтожаются, а производственные мощности используются полностью, поэтому основное балансовое соотно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-06-10909).

шение принимает вид дифференциальной системы

$$\dot{x} = B\dot{x}' + Ax + u. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое в правой части показывает расход произведенных продуктов на расширение производства, второе – на его текущий процесс, а третье – на внешнее потребление. Сделаем несколько замечаний.

Во-первых, (1) не учитывает в явном виде выбытие производственных мощностей. Если коэффициенты выбытия собрать в диагональную матрицу $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$, то в правую часть (1) следовало бы добавить слагаемое $BQ\dot{x}$, показывающее затраты продуктов на восполнение выбывающих мощностей. Это значит, что вместо матрицы A следовало бы использовать $A + BQ$. Поэтому можно считать, что необходимая добавка уже включена в A .

Во-вторых, модель явно не включает в себя производственные лаги. Если их величины по всем отраслям собрать в диагональную матрицу $T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$, то наличие лагов при сравнительно небольших τ_j можно приближенно трактовать как необходимость иметь запас продуктов в размере ATx , который вовлечен в незавершенное производство. Поскольку для продуктового баланса имеет значение не сам объем такого запаса, а скорость его изменения, в правую часть (1) следовало бы добавить слагаемое $AT\dot{x}'$, т.е. матрицу B заменить на $B + AT$. Можно считать, что в матрицу B уже такая добавка включена. Для более точного учета производственных лагов пришлось бы перейти к дифференциальной системе с запаздывающим аргументом.

В-третьих, помимо инвестиционного и производственного потребления, которые явно учтены в (1), выделяются:

потребление работников, направленное на воспроизводство рабочей силы и осуществляемое за счет заработной платы;

потребление держателей акций, осуществляемое за счет дивидендов;

государственное потребление, реализуемое из суммы налогов.

Предположим, что для рассматриваемой экономической системы вполне определен набор продуктов, используемый на воспроизводство единицы труда. Обозначим его через $(c_1, \dots, c_n)$, а трудовые затраты на производство единицы продукции соответствующего вида через $(a_1, \dots, a_n)$. Тогда потребление работников равно Sx , где S – $n \times n$ -матрица с элементами $s_{ij} = c_i a_j$. Таким образом, этот вид потребления можно объединить с производственным, заменив A на $A + S$. Будем считать, что это уже сделано в (1). Что касается потребления государственного и держателей акций, то они объединяются в суммарное внешнее потребление u и осуществляются за счет суммы отчислений в виде процента от прибыли.

В-четвертых, возможность перетока созданных производственных мощностей из одной отрасли в другую определяется выбором допустимых траекторий. Если такой переток возможен, то условием допустимости является лишь неотрицательность $x_j(t)$ при всех t ; если же он запрещен, то допустимость дополнительно описывается неравенствами $\dot{x}_j' \geq -q_j x_j$. Для дальнейшего выбора того или другого предположения не существен; от него зависит лишь выбор области управляемости. Возьмем в качестве базового вариант с возможным перетоком основного капитала.

В заключение этого раздела отметим следующее. Если в (1) потребление u трактовать как зависящую от времени внешнюю нагрузку, то систему (1) надо отнести к классу жестких, поскольку матрица B либо вырожденная, либо близка к таковой. Это значит, что выбор внешней нагрузки следует делать осторожно, так как жесткие системы очень чувствительны к погрешностям управления. Кроме того, траектория сбалансированного роста, существующая при надлежащем выборе внешней нагрузки, может оказаться неустойчивой (это зависит от спектра неотрицательной матрицы $(E - A)^{-1}B$, где E – единичная матрица, а матрица A предполагается продуктивной). Управление внешним потреблением, рассматриваемое в последующих разделах, как раз и направлено на борьбу с этими двумя обстоятельствами.

2. УПРАВЛЕНИЕ ВНЕШНИМ ПОТРЕБЛЕНИЕМ

Хорошо известно, что устойчивость системы достигается организацией подходящей обратной связи между внешним воздействием и состоянием системы. Так мы поступим и в отношении (1). Вместо того чтобы внешнее потребление задавать в виде некоторой функции времени, будем считать, что оно определяется состоянием $x(t)$. При этом ограничимся линейной обратной связью, т.е. подберем квадратную матрицу U и положим

$$u(t) = Ux(t). \quad (2)$$

Цель такого управления в данной статье – обеспечение в стационарном режиме необходимой структуры внешнего потребления, а также стабилизация развития системы вдоль устойчивой траектории сбалансированного роста, описываемой дифференциальной системой, разрешенной относительно производных, т.е. системой вида

$$x' = \delta Cx. \quad (3)$$

Для достижения поставленных целей на матрицу C нужно наложить следующее условие.

Предположение 1. Матрица C имеет простое собственное число, равное единице, и соответствующие ему строго положительные левый и правый собственные векторы. Вещественные части остальных собственных чисел матрицы C меньше единицы.

Левый и правый собственные векторы (строку и столбец) обозначим через π и η , взаимно нормировав их условием $\pi\eta = 1$:

Дифференциальная система (3) имеет траекторию сбалансированного роста в виде луча с направляющим вектором η и темпом роста δ . При этом строка π может служить строкой оценок для измерения качества любого начального состояния x_0 с точки зрения асимптотики соответствующей траектории. Действительно, умножив (3) слева на π , с учетом равенства $\pi C = \pi$ получим $(\pi x)' = \delta(\pi x)$, т.е. вдоль траектории с начальным состоянием x_0 справедливо равенство $\pi x = (\pi x_0)\exp(\delta t)$. Положив $x(t) = [(\pi x_0)\eta + y]\exp(\delta t)$, найдем, что составляющая y удовлетворяет дифференциальной системе

$$y' = \delta(C - E)y. \quad (4)$$

причем $\pi y = 0$ вдоль всей траектории y . В силу предположения 1 на однородной гиперплоскости, задаваемой уравнением $\pi y = 0$, дифференциальная система (4) топологически эквивалентна системе $y' = -y$ и, следовательно, $y(t) \rightarrow 0$ при любом начальном состоянии x_0 . Таким образом, величина πx_0 на траектории (3) вместе с темпом δ определяют положение на луче сбалансированного роста точки $(\pi x_0)\exp(\delta t)\eta$, относительно близкой к $x(t)$.

Остановимся теперь на выборе системы (3), точнее на выборе левого и правого собственных векторов матрицы C и темпа δ . Пусть желаемая структура внешнего потребления задается положительным столбцом u^* . Это значит, что при нахождении на луче сбалансированного роста внешнее потребление должно расти с темпом δ и быть пропорционально u^* . Если в (1) подставить (3), то

$$u = (E - A - \delta BC)x, \quad (5)$$

т.е. в (2) надо положить $U = E - A - \delta BC$. Так как $C\eta = \eta$, то при подходящей нормировке η получаем, что для $x = \eta$ в (5)

$$u^* = (E - A - \delta B)\eta. \quad (6)$$

Равенство (6) можно рассматривать как уравнение относительно искомого направления η . Что касается темпа δ , то его выбор ограничен условием положительной

обратимости матрицы системы (6). Именно, если через r обозначить спектральный радиус неотрицательной матрицы $(E - A)^{-1}B$, то должно выполняться условие

$$\delta r < 1. \quad (7)$$

При выборе темпа роста δ возникает, конечно, стандартная коллизия между потреблением сегодня и его темпом роста в будущем. Для оценки ситуации возьмем цены p длительного равновесия в ненагруженной системе. Определим их из уравнения

$$p[r(E - A) - B] = 0 \quad (8)$$

и найдем направление z сбалансированного роста ненагруженной системы из равенства

$$[r(E - A) - B]z = 0. \quad (9)$$

Нормируем p и z условиями

$$pi^* = p(E - A)z = 1. \quad (10)$$

Направление z нам понадобится в дальнейшем при выборе строки π .

Пусть мы находимся на луче сбалансированного роста системы (3) и в денежном выражении чистый выпуск продукции равен M , т.е. $p(E - A)x = M$, где $x = \alpha\eta$. Умножив (8) на η , найдем: $1 = pi^* = p(E - A)\eta - \delta B\eta = (1 - \delta r)p(E - A)\eta = (1 - \delta r)M/\alpha$. Таким образом, $\alpha = (1 - \delta r)M$ и график потребления вдоль луча сбалансированного роста имеет вид $u(t) = [(1 - \delta r)M \exp(\delta t)]u^*$. Эта формула и иллюстрирует коллизию при выборе темпа δ .

Подытожим проведенное обсуждение в форме следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть матрица C удовлетворяет предположению 1, η определено из равенства (6) при $u^* > 0$, $C\eta = \eta$, $\pi C = \pi$, $\pi\eta = 1$, $\delta > 0$, и выбор внешнего потребления u осуществляется согласно (5). Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) всякая траектория системы (3) согласуется с балансовым равенством (1);
- б) система (3) имеет траекторию сбалансированного роста: $x(t) = (\pi x_0) \exp(\delta t) \eta$;
- в) любая траектория системы (3) имеет вид $x(t) = \exp(\delta t)[(\pi x_0)\eta + y(t)]$, где $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$;
- г) если r — спектральный радиус матрицы $(E - A)^{-1}B$, то $\delta r < 1$ и потребление вдоль траектории сбалансированного роста описывается формулой: $u(t) = [(1 - \delta r)M \exp(\delta t)]u^*$, где M — оценка чистого выпуска системы в начальный момент времени по ценам длительного равновесия, определенным согласно (8) и (10);
- д) вдоль любой траектории системы (3) главная часть внешнего потребления выражается так: $u(t) = \exp(\delta t)[(\pi x_0)u^* + o(1)]$.

Перейдем к выбору строки π . Вообще говоря, никаких принципиальных ограничений на ее выбор, кроме условия положительности, нет. Рассмотрим, однако, ситуацию в окрестности луча сбалансированного роста. Хотя сама матрица C не обязана быть неотрицательной, вектор Cx вблизи этого луча положителен. Сформируем две диагональные матрицы X и D , взяв в качестве их диагональных элементов компоненты векторов x и Cx соответственно. Если через e обозначить столбец, все компоненты которого равны единице, то (5) можно переписать в виде

$$u = [(E - A)X - \delta BD]e. \quad (11)$$

Как и при получении условия (7), рассмотрим неотрицательную матрицу

$$X^{-1}(E - A)^{-1}BD \quad (12)$$

и через $r(x)$ обозначим ее спектральный радиус. Зависимость $r(x)$, очевидно, является однородной нулевой степени. Вдоль луча сбалансированного роста $r(x) = r$, так как

$D = X$ при $x = \eta$, и матрица (12) подобна $(E - A)^{-1}B$. Положительность управления u в (11) снова влечет за собой условие $\delta r(x) < 1$. Таким образом, чтобы иметь возможность выбирать темп роста δ достаточно большим в окрестности луча сбалансированного роста, $r(x)$ в этой окрестности должно меняться медленно, т.е. производная $r(x)$ по x при $x = \eta$ должна быть нулевой. Найдем ее.

Пусть $v(x)$ и $w(x)$ – левый и правый собственные векторы матрицы (12), соответствующие собственному числу $r(x)$. Тогда столбец $z(x) = Xw(x)$ удовлетворяет равенству

$$[r(x)(E - A) - BD X^{-1}]z(x) = 0. \quad (13)$$

Вместо строки $v(x)$ введем другую: $p(x) = v(x)X^{-1}(E - A)^{-1}$, для которой

$$p(x)[r(x)(E - A)X - BD] = 0. \quad (14)$$

Чтобы избежать неоднозначности и обеспечить простоту собственного числа $r(x)$, подобно (10) нормируем $z(x)$ и $p(x)$ условием

$$p(x)u^* = p(x)(E - A)z(x) = 1 \quad (15)$$

и наложим на матрицы A и B следующее требование.

Предположение 2. Неотрицательная матрица A продуктивна, а неотрицательная матрица $(E - A)^{-1}B$ неразложима.

В окрестности луча сбалансированного роста диагональные матрицы X и D имеют строго положительные диагональные элементы, поэтому в силу предположения 2 матрица (12) также неотрицательная и неразложимая. Таким образом, $r(x)$, $p(x)$ и $z(x)$ определены однозначно и их можно дифференцировать.

Умножим (13) слева на $p(x)$, продифференцируем полученное скалярное равенство по x и учтем затем (13) и (14), а также нормировку (15). Получим

$$dr/dx = p(x)BZ(x)X^{-1}(C - X^{-1}D), \quad (16)$$

где $Z(x)$ – диагональная матрица, построенная из компонент столбца $z(x)$, т.е. $Z(x) = \text{diag}(z_1(x), \dots, z_n(x))$.

На луче сбалансированного роста, где $D = X$ и $r(x) = r$, (13) и (14) эквивалентны (8) и (9). Ввиду совпадения нормировок (10) и (15), на луче сбалансированного роста $p(x) = p$ и $z(x) = z$. Таким образом, условие медленного изменения спектрального радиуса $r(x)$ в окрестности луча сбалансированного роста сводится к равенству

$$pBZH^{-1}(C - E) = 0, \quad (17)$$

в силу которого $dr/dx = 0$ на луче сбалансированного роста. Здесь H – диагональная матрица, построенная из компонент столбца η , а Z – из компонент столбца z . Учитывая (10), условие нормировки $\pi \eta = 1$ и равенство (17) однозначно определяют строку π

$$\pi = p(E - A)ZH^{-1}. \quad (18)$$

Строка (18) имеет ясный содержательный смысл. Будем трактовать столбцы z и η как нормативы, показывающие структуру производства на единицу общей прибыли в соответствующих режимах сбалансированного роста (ненагруженном и нагруженном). Тогда безразмерная диагональная матрица ZH^{-1} характеризует деформацию режимов. Она переводит столбец η в столбец z , т.е. $z = (ZH^{-1})\eta$. Строка $p(E - A)$, как обычно, указывает прибыль на единицу валового выпуска отраслей по ценам длительного равновесия. Действие строки π на некоторое состояние x можно теперь представить в виде последовательности двух операций. Сначала умножением столбца x на матрицу деформации ZH^{-1} состояние системы переводится в эквивалентное (в определенном

смысле) для ненагруженного режима, а затем по этому преобразованному состоянию подсчитывается эквивалентная прибыль системы. В результате получается оценка πx состояния x , которая вдоль любой траектории системы (3) растет с темпом δ . Получена следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и предположение 2. Допустим также, что для состояния $x > 0$ оказывается $Sx > 0$. Обозначим через r спектральный радиус матрицы $(E - A)^{-1}B$ и определим p и z из (8)–(10). Пусть далее X , Z и D – диагональные матрицы, составленные из компонент столбцов x , z и Sx . Наконец, обозначим через $r(x)$ спектральный радиус матрицы (12) и определим $p(x)$ и $z(x)$ из (13)–(15). Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) $r(x) > 0$, зависимость $r(x)$ от x – однородная нулевой степени и на луче сбалансированного роста $r(x) = r$;
- б) чтобы внешнее потребление u , определенное по (5), было положительным, необходимо выполнение неравенства $\delta r(x) < 1$;
- в) если левый собственный вектор матрицы C выбрать согласно (18), то на луче сбалансированного роста $dr(x)/dx = 0$.

В заключение сделаем одно замечание. В п. а) теоремы не утверждается, что при управлении (5) из (1) автоматически следует (3). При особенной матрице B это не так. Для обеспечения в данном случае движения в соответствии с (3) необходимо в дополнение к управлению (5) поддерживать нужный режим ценообразования. Это обсуждается ниже.

3. ОБЛАСТЬ УПРАВЛЯЕМОСТИ

В разд. 2 в основном обсуждались вопросы материальных потоков и балансов. Между тем для экономической системы не меньшее значение имеют положительность и неразрывность финансовых потоков, включая сферу внешнего потребления. Уже говорилось, что для финансового обеспечения внешнего потребления в модели рассматривается суммарная ставка отчисления с прибыли. Обозначим ее через σ , имея при этом в виду, что она, вообще говоря, зависит от текущего состояния системы.

При ценах $p(x)$ и потреблении u финансовый баланс сферы внешнего потребления выражается равенством

$$p(x)u = \sigma p(x)(E - A)x, \quad (19)$$

где справа стоит сумма отчислений с прибыли. Формально из (19) можно было бы вычислить ставку отчислений. Однако это не вполне корректный способ, так как предполагается, что цены определились независимо от σ . Реально же дело обстоит как раз наоборот. Именно корректный выбор ставки σ призван обеспечить существование цен, при которых для управления (5) балансируются финансовые потоки в сфере производства, а (19) является следствием этих балансов.

Действительно, если снова ввести диагональные матрицы X и D с диагональными элементами из столбцов x и Sx , то ввиду (3) финансовые балансы для всех отраслей примут вид

$$p(x)[(1 - \sigma)(E - A)X - \delta BD] = 0. \quad (20)$$

Это равенство лишь скалярным множителем отличается от (14) и для существования положительных $p(x)$ необходимо σ выбрать из условия $r(x) = (1 - \sigma)/\delta$, т.е.

$$\sigma = 1 - \delta r(x). \quad (21)$$

Напомним, что через $r(x)$ обозначен спектральный радиус матрицы (12). При таком выборе σ цены $p(x)$ должны установиться в соответствии с (14), и можно снова использовать нормировку (15).

В предыдущем разделе мы интересовались состояниями в окрестности луча сбалансированного роста и использовали условие $Sx > 0$. На самом деле оно не является необходимым для реализуемости управления (5). Нужны лишь положительность $r(x)$, положительная разрешимость системы (14) и положительность управления (5). Именно эти условия описывают область управляемости. Для практического применения удобно несколько сузить данную область.

Рассмотрим матрицу

$$BDX^{-1}(E - A)^{-1}. \quad (22)$$

Она подобна матрице (12) и, следовательно, имеет тот же спектральный радиус, но остается неотрицательной в более широкой области значений x , чем (12). Искомая строка цен $p(x)$ является левым собственным вектором для матрицы (22), соответствующим ее собственному числу $r(x)$. Таким образом, при описании области управляемости можно ограничиться положительностью управления u , неотрицательностью σ в (21) и неотрицательностью матрицы (22). Заметим, что выбор строки π по (18), обеспечивающий медленное изменение $r(x)$ в окрестности луча сбалансированного роста, ведет и к медленному изменению ставки σ .

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1 и 2, при данном состоянии x внешнее потребление u , определенное согласно (5), положительно и матрица (22) неотрицательная. Тогда для существования положительных цен, поддерживающих управление u , ставка σ отчислений от прибыли должна определяться из (21), где $r(x)$ — спектральный радиус матрицы (22). При этом сами цены, обеспечивающие баланс финансовых потоков, задаются левым собственным вектором этой матрицы.

Если матрица B неособенная, и в силу этого управление (5) с необходимостью заставляет экономику развиваться согласно дифференциальной системе (3), то при правильном выборе ставки σ цены должны были бы устанавливаться (с точностью до нормировки) в соответствии с (20) автоматически. Когда матрица B вырожденная или близка к ней, может потребоваться централизованное регулирование ценообразования с использованием тех или иных внемоделных рычагов. Однако это — мягкое регулирование, так как подталкивает к выбору без силовой ломки необходимых балансов.

В соответствии со сказанным в разд. 1 возможное омертвление оборотного капитала в связи с лагами производства включено в коэффициенты матрицы B . Если сами производственные мощности оценивать по их восстановительной стоимости, то вовлеченный в производство капитал (по отраслям) на единицу мощности выражается строкой $p(x)B$, а получаемая прибыль — строкой $p(x)(E - A) = (1/r(x))p(x)BDX^{-1}$.

Безразмерная диагональная матрица $K = DX^{-1}$ снова описывает искажение структуры производства по сравнению со структурой режима сбалансированного роста, при котором норма прибыли на капитал $1/r$ одинакова для всех отраслей.

Дифференциальную систему (3), являющуюся целью описанного управления, можно представить в виде $\dot{x}' = \delta Kx$ и трактовать как некоторую модель нащупывания, при котором капитал в большей степени вливается в те отрасли, у которых текущая норма прибыли выше. Отметим также, что величину $1/r(x)$ естественно трактовать как текущую среднюю норму прибыли.

4. ВАРИАНТЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим три примера управления. Начнем с обсуждения варианта выбора матрицы C , не удовлетворяющего предположению 1, но достаточно популярного.

1. **В а р и а н т** с т а б и л ь н ы х п р о п о р ц и й. Речь идет о выборе в качестве матрицы C единичной матрицы, а в качестве η — текущего состояния x_0 . В данном случае сразу постулируется нахождение на траектории сбалансированного роста,

поэтому всегда $D = X$, матрица (22) совпадает с $B(E - A)^{-1}$, цены p и ставка σ не зависят от времени. Эти привлекательные свойства перекрываются, с нашей точки зрения, недостатками сделанного выбора. Прежде всего с ног на голову ставятся сами цели управления. Смысл работы экономики и управления ею состоит в обеспечении внешнего потребления нужной структуры, что полностью игнорируется в этом варианте. Есть и техническая трудность. При $C = E$ фактически не только фиксируется существующая структура потребления (5), но и сильно ограничивается возможный темп роста δ требованием положительности управления u . Так как структура производства не меняется, то практически и темп роста будет не многим отличаться от имеющегося. Таким образом, рассматриваемый вариант является не управлением, а лишь описанием того, что есть в данный момент.

Небольшой темп роста может получиться и в других вариантах управления, если текущая структура производства слишком далека от магистральной. Однако за счет ее исправления в дальнейшем темп роста можно увеличивать.

2. В а р и а н т п р о с т о г о у п р а в л е н и я. Возьмем $\delta > 0$, обеспечивающее положительность решения системы (6), и определим из нее η для интересующей нас структуры потребления u^* . Выберем положительную строку π так, чтобы оказалось

$$\pi\eta = 1, \quad u_0 = (E - A)x_0 - \delta(\pi x_0)B\eta > 0, \quad (23)$$

где x_0 — начальное состояние экономики. Если удовлетворить условиям (23) не удастся, придется временно уменьшить темп δ . Естественно предположить, что $(E - A)x_0 > 0$, в противном случае говорить о внешнем потреблении не приходится. Для выбранных η и π положим $C = \eta\pi$, т.е. выберем в качестве C положительную матрицу ранга один, тривиально отвечающую предположению 1.

При указанной C и описанном ранее управлении состояние экономики изменяется по траектории $x(t) = x_0 + (\pi x_0)[\exp(\delta t) - 1]\eta$, а внешнее потребление вдоль нее задается формулой: $u(t) = u_0 + (\pi x_0)[\exp(\delta t) - 1]u^*$.

Так как $D = (\pi x)H$, матрица (22) неотрицательная при любых положительных x . Напомним, что H — диагональная матрица, построенная из компонент столбца η . Таким образом, если исходная точка x_0 находится в области управляемости, то и вся траектория $x(t)$ эту область не покидает.

При неудачной исходной структуре производства выбрать в качестве π строку (18), может быть, и не удастся. Это может повлечь выбор чрезмерно малого темпа δ (для обеспечения второго условия (23)). Однако в такой ситуации (18) и не дает никаких преимуществ, так как обеспечивает медленное изменение ставки σ и средней нормы прибыли лишь в достаточно малой окрестности луча сбалансированного роста. Целесообразнее, обеспечивая минимально необходимый уровень внешнего потребления, за счет выбора π добиться возможно большего темпа δ , а выправив структуру производства, переходить на управление со строкой (18). Возможно, потребуются ряд корректировок управления. Напомним, что при изменении δ несколько меняется и направление η сбалансированного роста.

3. У п р а в л е н и е с п о д а в л е н и е м о т к л о н е н и й. Рассмотренный вариант простого управления наряду с отмеченными достоинствами обладает и довольно существенным недостатком, а именно: начальная составляющая u_0 во внешнем потреблении сохраняется вдоль всей траектории, т.е. неизбежные отклонения, возникающие в процессе управления, будут накапливаться. В связи с этим видоизменим матрицу C , положив $C = (1 + \gamma)\eta\pi - \gamma E$, где $\gamma > 0$. Второе соотношение в (23) заменится на $u_0 = (E - A + \delta\gamma B)x_0 - (1 + \gamma)\delta(\pi x_0)B\eta > 0$.

Легко видеть, что предположение 1 снова выполняется. Уравнение (3) теперь принимает вид $x' = (1 + \gamma)\delta(\pi x)\eta - \delta\gamma x$ и определяет следующие траекторию движения и график внешнего потребления: $x(t) = \exp(-\delta\gamma t)x_0 + (\pi x_0)[\exp(\delta t) - \exp(-\delta\gamma t)]\eta$; $u(t) = \exp(-\delta\gamma t)u_0 + (\pi x_0)[\exp(\delta t) - \exp(-\delta\gamma t)]u^*$.

Теперь уже нельзя гарантировать неотрицательность матрицы (22) при всех положительных x . Однако если $Cx_0 > 0$, то и в дальнейшем будет сохраняться неравенство $Cx > 0$. То же относится и к внешнему потреблению. Таким образом, на управление с подавлением отклонений можно переходить при приближении к лучу сбалансированного роста, где, собственно, и требуется такое подавление.

Остановимся вкратце на выборе γ . На первый взгляд может показаться, что предпочтительнее большее значение γ , поскольку при этом отклонения будут быстрее подавляться. Но здесь надо проявлять осторожность. Во-первых, следует принимать во внимание внемодельные эффекты, связанные с чрезмерно быстрой структурной перестройкой. Во-вторых, если в (16) подставить рассматриваемое значение матрицы C , то $dr/dx = (1 + \gamma)p(x)BZX^{-1}[\eta\pi - (\pi x)HX^{-1}]$. Таким образом, даже если строка π выбрана в соответствии с (18), при большом γ с удалением от луча сбалансированного роста скорость изменения средней нормы прибыли, а значит, и скорость изменения ставки σ , будут быстро увеличиваться.

Можно представить себе следующий подход к выбору γ . Предположим, что ожидаемое возмущение в правой части системы (3) оценивается величиной $\varepsilon(\pi x)$. Тогда суммарная накопленная погрешность (отклонение от траектории сбалансированного роста) оценивается так: $\varepsilon(\pi x)/\delta(1 + \gamma)$, где πx характеризует общий уровень производства, а $\varepsilon/\delta(1 + \gamma)$ – интегральное относительное отклонение от желаемой траектории. Величину γ нужно выбрать исходя из нашей готовности мириться с отклонением. Так, если $\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,01$, то при $\gamma = 9$ интегральное относительное отклонение не превысит 2%. Возможно, однако, что такая величина γ чрезмерна по внемодельным соображениям. Тогда придется мириться с большим интегральным отклонением.

ЛИТЕРАТУРА

1. von Neumann J. A Model of General Economic Equilibrium // Rev. Econ. Studies, 1946. V. 13. № 1.
2. Leontief W.W. The Structure of American Economy, 1919–1939. N.Y., 1951.
3. Gale D. The Theory of Linear Economic Models. N.Y., 1960 (рус. пер.: Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963).
4. Radner R. Path of Economic Growth that are Optimal with Regard Only to Final States: A Turnpike Theorem // Rev. Econ. Studies. 1961. V. 28. № 2.
5. Nikaido H. Persistence of Continual Growth Near the von Neumann Ray: A Strong Version of the Radner Turnpike Theorem // Econometrica. 1964. V. 32. № 1–2.
6. Morishima M. Equilibrium, Stability and Growth; a Multisectoral Analysis. L. – N.Y., 1964 (рус. пер.: Равновесие, устойчивость, рост: многоотраслевой анализ. М.: Наука, 1972).
7. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
8. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономическим задачам. Л.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
15 XII 1993