

НЕОДНОРОДНОСТЬ ИНФОРМАЦИИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ*

© 1995 г. Катышев П.К.

(Москва)

Рассматривается модель общего стохастического равновесия, в которой участники обладают разной информацией. Показано, что в этой ситуации свойства равновесных состояний могут существенно отличаться от свойств состояний классического равновесия.

ВВЕДЕНИЕ

При переходе от плановой системы хозяйства к рыночной происходит децентрализация не только управления, но и той информации, которой обладают ее участники, которая влияет на их поведение и в конечном итоге на состояние экономики в целом. Кроме того, само понятие информации является неоднозначным, поэтому возникает большое число подходов к исследованию поведения системы. Наилучшие результаты дает равновесный вероятностный подход. Естественным выдвинуть две задачи: 1) построение и изучение соответствующих моделей; 2) их сравнение с классическими детерминированными моделями экономического равновесия.

Сосредоточим внимание на второй, поскольку по первой проблеме имеется довольно обширная литература (см., например [1–6]). Ниже будет описана достаточно общая равновесная модель, вообще говоря, с неоднородной информационной структурой, явно влияющей на поведение участников экономической системы. В тех или иных вариантах эта модель рассматривалась в [1–6]. Для нее теорема существования равновесия не сложна и вытекает из соответствующих результатов для детерминированных моделей с использованием теорем измеримого выбора. Однако наличие у участников разной информации приводит к тому, что свойства равновесных состояний могут значительно отличаться от свойств равновесных состояний в детерминированном случае.

Хорошо известно, что при выполнении некоторых условий регулярности (например, в неоклассическом случае) равновесное распределение в модели Эрроу–Дебре оптимально по Парето. Мы приведем три примера, иллюстрирующих следующие ситуации в стохастических моделях: 1) равновесное распределение, не оптимальное по Парето, с положительной вероятностью; 2) информационную неустойчивость, внешне напоминающую хорошо известный бюджетный парадокс; 3) расходимость "процесса коррекции информации" (точное определение будет дано), аналогичного процессу "подстройки" цен в классическом равновесии.

ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ

В модели участвует N потребителей и n типов товаров. Действие экзогенных случайных факторов в экономике описывается вероятностным пространством (Ω, F, P) .

Потребитель с номером i характеризуется: функцией полезности u_i ; $\Omega \times R_+^n \rightarrow R^1$, где $u_i(\omega, x)$ дает численное выражение полезности, доставляемой участнику набором

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-06-10356).

продуктов $x \in R_+^n$ при действии случайного фактора $\omega \in \Omega$; начальным запасом товаров $e_i: \Omega \rightarrow R_+^n$; доходом $\beta_i: \Omega \rightarrow R_+^1$.

Как уже отмечалось, понятие информации, доступной потребителю, можно formalизовать по-разному. Содержательный смысл одного из возможных подходов, используемых не только в экономико-математических моделях, состоит в следующем.

Принятие участником того или иного решения зависит от значений каких-то показателей, которые, в свою очередь, могут зависеть от ω . Предполагается, что участник может «наблюдать» некоторую совокупность случайных событий. Это означает, что при реализации случайного фактора ω участнику неизвестно его истинное значение, а он может лишь сказать, какое из событий, доступных его наблюдению, при этом произошло. Поэтому, говоря не строго, при принятии решения он вынужден ориентироваться не на точные величины показателей, а на их значения, полученные некоторым осреднением по заданной совокупности случайных событий. Формально это означает, что задана σ -алгебра событий, наблюдаемых участником, и указанное осреднение есть взятие условных математических ожиданий соответствующих функций относительно этой σ -алгебры (см. ниже (1)). Чем она тоньше, тем более информирован участник. В том случае, когда σ -алгебра совпадает с F , говорят, что участник обладает полной информацией. Если же она тривиальна, то участник полностью неинформирован, принимаемые им решения основываются просто на средних значениях показателей.

Итак, будем предполагать, что для каждой $i = 1, \dots, N$ задана σ -алгебра $F_i \subseteq F$, и набор $(F_1, \dots, F_N)$ определяет информационную структуру модели.

Сферу производства для простоты будем описывать случайным вектором $a: \Omega \rightarrow R_+^n$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

1. При каждом $x \in R_+^n$ функция $u_i(\cdot, x)$ F_i -измерима, $i = 1, \dots, N$.
2. При каждом $\omega \in \Omega$ функция $u_i(\omega, \cdot)$ непрерывна, строго вогнута и возрастает по каждому аргументу, $i = 1, \dots, N$.
3. Функции $e_i(\cdot)$, $\beta_i(\cdot)$ F_i -измеримы, и при каждом $\omega \in \Omega$ либо $e_i(\omega) > 0$, либо $\beta_i(\omega) > 0$.
4. Отображение $a: \Omega \rightarrow R_+^n$ F -измеримо.

Определение 1. Системой цен или просто ценами называется F -измеримое отображение $p: \Omega \rightarrow R_+^n$.

Пусть задана система цен p . Участник с номером i не знает "истинного" значения случайного параметра ω и поэтому выбирает план потребления на основе собственной информации путем решения задачи

$$v_i(\omega, x) \triangleq E[u_i(\cdot, x) | F_i](\omega) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$p(\omega)x \leq p(\omega)e_i(\omega) + \beta_i(\omega). \quad (2)$$

Обозначим ее решение через $\xi_i(p)(\omega)$ (функция спроса участника с номером i).

Определение 2. Равновесным состоянием или просто равновесием называется система цен $p^*(\cdot)$ и набор F -измеримых отображений $(x_1^*(\cdot), \dots, x_N^*(\cdot))$ таких, что

$$(1) \ x_i^*(\omega) \in \xi_i(p^*)(\omega), \ i = 1, \dots, N, \ P - \text{п.н.},$$

$$(2) \ \sum_{i=1}^N x_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^N e_i(\omega) + a(\omega), \ P - \text{п.н.}$$

Нетрудно установить, что при выполнении условий 1–4 равновесие существует. Это почти непосредственно вытекает из соответствующих результатов для классических детерминированных моделей. (Говоря не совсем строго, мы имеем дело с одним из вариантов модели неоклассической случайной экономики.) Однако наличие разной информации у участников модели приводит к тому, что в отличие от детерминированного случая равновесные состояния могут не обладать оптимальностью по Парето и, кроме того, проявлять свойство так называемой информационной неустойчивости, что напоминает хорошо известный бюджетный парадокс в теории классического равновесия. Далее дается описание соответствующих примеров.

ОТСУТСТВИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОСТИ

Легко показать, используя известные результаты модели Эрроу – Дебре, что равновесное распределение $(x_1^*(\omega), \dots, x_N^*(\omega))$ оптимально по Парето относительно функций полезности $u_1(\omega, \cdot), \dots, u_N(\omega, \cdot)$ (P – п.н.). Возникает естественный вопрос о его парето-оптимальности относительно исходных функций полезности $u_1(\omega, \cdot), \dots, u_N(\omega, \cdot)$. Легко построить такой пример, если $\sigma\{F_1, \dots, F_N\} \neq F$. (В некоторых моделях σ -алгебру $\sigma\{F_1, \dots, F_N\}$ называют "общим знанием" – common knowledge, и отсутствие парето-оптимальности, когда участники "мало знают", является скорее общим случаем, а не исключением.) Более интересным представляется тот факт, что даже при выполнении равенства $\sigma\{F_1, \dots, F_N\} = F$ равновесное распределение $(x_1^*(\omega), \dots, x_N^*(\omega))$ может не быть оптимальным по Парето при любом $\omega \in A$, где $A \in F$ – некоторое множество, имеющее положительную вероятность.

Пусть $N = n = 2$, $\Omega = [0, 1]$, $F = \beta([0, 1])$ (борелевская σ -алгебра), P – мера Лебега на F). Обозначим $x = (y, z)$. Предположим, что функции полезности участников одинаковы: $u_1(\omega, x) = u_2(\omega, x) = \omega \ln y + (1 - \omega) \ln z$. Пусть также $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $a = 0$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. (Заметим, что в данном случае не выполнено условие 3. Можно было бы добиться его выполнения, заменив нулевые компоненты векторов e_i малыми положительными числами, но это лишь усложнило бы вычисления, не изменив существа.) Наконец, будем считать, что первый участник полностью информирован: $F_1 = F$, а второй полностью неинформирован: $F_2 = \{\phi, \Omega\}$. Тогда

$$x_1^*(\omega) = (y_1^*(\omega), z_1^*(\omega)) = \left[\omega, \frac{1}{2} \right],$$

$$x_2^*(\omega) = (y_2^*(\omega), z_2^*(\omega)) = \left[1 - \omega, \frac{1}{2} \right].$$

Соответствующие значения полезностей

$$u_1^*(\omega) \equiv u_1(x_1^*(\omega)) = \omega \ln \omega + (1 - \omega) \ln \frac{1}{2},$$

$$u_2^*(\omega) \equiv u_2(x_2^*(\omega)) = \omega \ln(1 - \omega) + (1 - \omega) \ln \frac{1}{2}.$$

Покажем, что существует допустимое распределение (x'_1, x'_2) (т.е. $x'_1 + x'_2 = e_1 + e_2$), такое, что $u_1(\omega, x'_1) > u_1^*(\omega)$, $u_2(\omega, x'_2) > u_2^*(\omega) \forall \omega \in A$, где $A \in F$ и $P(A) > 0$.

Зафиксируем некоторое ω и рассмотрим малый "сдвиг" равновесного распределения

$$y'_1 = y_1^* + \Delta y, \quad z'_1 = z_1^* - \Delta z,$$

$$y'_2 = y_2^* - \Delta y, \quad z'_2 = z_2^* + \Delta z.$$

Очевидно, что это распределение допустимо. Главные части приращений полезностей имеют вид

$$\Delta u_1 = 2\Delta z \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} + \omega - 1 \right], \quad \Delta u_2 = \frac{2\Delta z}{1-\omega} \left[(1-\omega)^2 - \frac{\Delta y}{2\Delta z} \omega \right]. \quad (3)$$

Обозначим $s = \omega$, $t = \Delta y / 2\Delta z$; $0 \leq s \leq 1$, $t > 0$. Ясно, что требуемое распределение существует, если найдется такое множество A с $P(A) > 0$, что для любого $s \in A$ существует такое число $t > 0$, что

$$t + s - 1 > 0,$$

$$(1-s)^2 - st > 0, \quad (4)$$

поскольку в этом случае $\Delta u_1 > 0$ и $\Delta u_2 > 0$ в силу (3). Решение системы (4) проще всего представить графически (см. рис. 1).

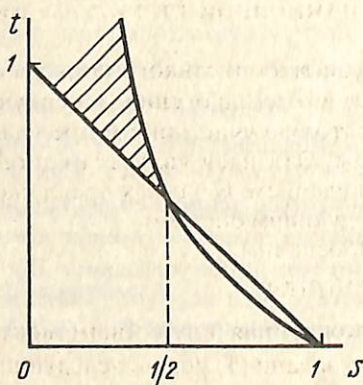


Рис. 1

Очевидно, что если $s \equiv \omega \in [0, 1/2]$, то существует такое число $t > 0$, что выполнена система (4). Это означает, что равновесное распределение не оптимально по Парето с положительной вероятностью.

ИНФОРМАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим предыдущий пример и будем считать, что $e_1 = (t_1, v_1)$, $e_2 = (t_2, v_2)$, P — некоторая вероятностная мера на F (не обязательно мера Лебега), а все остальные параметры те же самые. Для компактной записи удобно ввести следующие обозначения $\omega = \alpha_1$, $E\omega = \alpha_2$. Пусть, как и раньше, $x_i^* = (y_i^*, z_i^*)$ — равновесное распределение.

Прямыми вычислениями получаем (ср. [3])

$$y_i^* = \alpha_i t_i + \frac{\sum_{k=1}^2 (1 - \alpha_k) t_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k v_k} \alpha_i v_i,$$

$$z_i^* = (1 - \alpha_i) v_i + \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k v_k}{\sum_{k=1}^2 (1 - \alpha_k) t_k} (1 - \alpha_i) t_i,$$

$i = 1, 2$.

Нетрудно проверить, что

$$\text{sign} \left[\frac{du_1}{d\alpha_2} (x_1^*) \right] = \text{sign} [(1 - \alpha_1) t_1 \alpha_2 v_2 - \alpha_1 v_1 (t - \alpha_2) t_2],$$

где $\text{sign}(x)$ — знак числа x .

Достаточно очевидно, что можно так подобрать исходные параметры α_i, v_i и t_i , что $\alpha_1 > \alpha_2$, $(du_1 / d\alpha_2)(x_1^*) < 0$.

Например, при $v_1 = v_2 = t_1 = t_2 = 1$ имеем

$$\text{sign} \left[\frac{du_1}{d\alpha_2} (x_1^*) \right] = \text{sign}(\alpha_2 - \alpha_1) (= \text{sign}(E\omega - \omega)).$$

Это означает, что в подобной ситуации более информированный участник может увеличить свою полезность, передавая неинформированному некоторую "информацию" об "истинном" значении случайного исхода ω . В определенном смысле это явление похоже на хорошо известный бюджетный парадокс в классическом равновесии.

КОРРЕКЦИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ. ПРИМЕР РАСХОДИМОСТИ

Одно из направлений развития описанного подхода состоит в том, что некоторые параметры модели, определяемые эндогенно (в первую очередь цены), сами служат носителями информации, которую участники могут использовать помимо экзогенной информационной структуры. Эта идея является одной из основных в моделях равновесия с рациональным ожиданием. В рамках предложенной здесь модели возможная формализация выглядит следующим образом.

Пусть p — система цен. Обозначим

$$v_i(\omega, x, p) = E[u_i(\cdot, x) | F_i \vee \sigma\{p\}](\omega), \quad (5)$$

где $\sigma\{p\}$ — σ -алгебра, порожденная случайным вектором p . Предположим, что участник с номером i вместо задачи (1) решает следующую задачу

$$v_i(\omega, x, p) \rightarrow \max, \quad (6)$$

при бюджетном ограничении (2). Определение равновесия остается таким же, как и раньше. Ясно, что вопрос о существовании равновесия становится теперь гораздо более сложным, чем для исходной модели.

На первый взгляд представляется естественным использовать процедуру коррекции информационной структуры для поиска равновесия, аналогичную "подстройке" цен в классических моделях.

Пусть p_1 — равновесная цена, реализовавшаяся в основной модели. Тогда в следующий период информация участника i становится $F_i^{(2)} = F_i \vee \sigma\{p_1\}$; вновь реализуется равновесие в основной модели с $F_i = F_i^{(2)}$ и т.д. В общем случае, если p_n — равновесная цена в период n , то в период $(n + 1)$ p_{n+1} — равновесная цена в основной модели с $F_i^{(n+1)} = F_i \vee \sigma\{p_n\}$. Возникает вопрос, будет ли последовательность $\{p_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходиться. Приводимый ниже пример, основанный на [4], дает отрицательный ответ.

Пусть $N = n = 2$, $e_1 = e_2 = 0$, $a = (1, 1)$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Пусть далее $\Omega = A_1 \cup A_2$, где $A_1 = \left[\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta \right]$, $A_2 = \left[\frac{2}{3} - \delta, \frac{2}{3} + \delta \right]$, $0 < \delta < \frac{1}{6}$

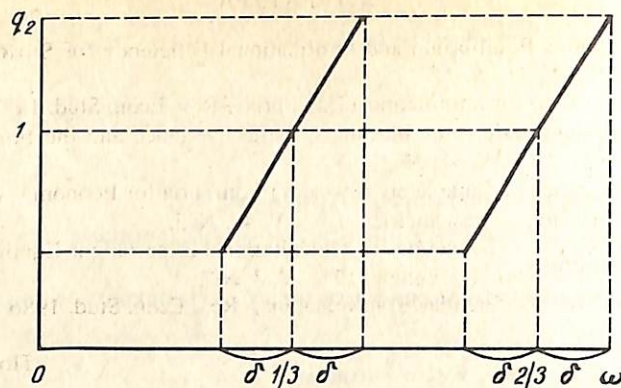


Рис. 2

(из последнего условия следует, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), $F = B(\Omega)$, $\mathbf{P}$ – равномерное распределение на Ω . Обозначим, как и раньше, $x = (y, z)$ и предположим, что участники имеют следующие функции полезности

$$u_1(\omega, x) = \omega \ln y + (1 - \omega) \ln z,$$

$$u_2(\omega, x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \omega\right) \ln y + \left(\frac{2}{3} - \omega\right) \ln z, & \text{если } \omega \in A_1, \\ \left(\omega - \frac{1}{3}\right) \ln y + \left(\frac{4}{3} - \omega\right) \ln z, & \text{если } \omega \in A_2. \end{cases}$$

Пусть, наконец, $F_1 = F$ и $F_2 = \{\phi, \Omega\}$. Обозначим $p = (q, r)$. Поскольку в равновесии всегда выполняется равенство $q + r = 2$, то будем рассматривать только компоненту q .

Непосредственными вычислениями получаем $q_1 = \omega + \frac{1}{2}$, так что $\sigma\{p_1\} = F$. Тогда во второй период

$$q_2(\omega) = \begin{cases} 2\omega + \frac{1}{3}, & \text{если } \omega \in A_1, \\ 2\omega - \frac{1}{3}, & \text{если } \omega \in A_2. \end{cases}$$

Для удобства на рис. 2 воспроизведен график функции q_2 . Можно проверить, что $\sigma\{p_2\} = \left\{B: B = C \cup \left(C + \frac{1}{3}\right), C \in B(A_1)\right\}$. Тогда в третий период получаем $F_1^{(3)} = F$, $F_2^{(3)} = \sigma\{p_2\}$ и, вновь проводя вычисления, имеем

$$q_3(\omega) = \begin{cases} 2\omega + \frac{1}{6}, & \text{если } \omega \in A_1, \\ 2\omega - \frac{1}{6}, & \text{если } \omega \in A_2. \end{cases}$$

Но при $\delta < 1/12$ эта функция является взаимно однозначной на Ω , и поэтому $\sigma\{p_3\} = F$. Значит, четвертый период совпадает со вторым, пятый – с третьим и т.д. Таким образом, последовательность $\{p_n\}$ расходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jordan J.S.* Expectations Equilibrium and Informational Efficiency for Stochastic Environments // *J. Econ. Theory*. 1977. V. 16. № 2.
2. *Green J.* The Non-existence of Informational Equilibria // *Rev. Econ. Stud.* 1977. V. 44. № 138.
3. *Radner R.* Rational Expectation Equilibrium: Generic Existence and the Information Revealed by Prices // *Econometrica*. 1979. V. 47. № 3.
4. *Allen B.* Generic Existence of Completely Revealing Equilibria for Economic with Uncertainty when Prices Convey Information // *Econometrica*. 1981. V. 49. № 5.
5. *Allen B.* A Class of Monotone Economies in which Rational Expectations Equilibria Exist but Price do not Reveal all Information // *Econ. Letters*. 1981. V. 7. № 2.
6. *Allen B.* The Demand for (Differentiated) Information // *Rev. Econ. Stud.* 1986. V. 53(3). № 174.

Поступила в редакцию
9 XII 1993