

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ\*

© 1995 г. Заславский А.А., Лебедев С.С.

(Москва)

Для решения целочисленной обобщенной транспортной задачи применен метод ветвей и границ специального вида, в котором используется сильная оценка расслоения. Она вычисляется до начала метода с помощью стратегии расслоения переменных и решения возникающих задач о рюкзаке методом динамического программирования (ДП). В процессе перебора узлов дерева вариантов оценки узлов определяются по таблицам ДП, которые при этом не пересчитываются.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее распространенным методом решения задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) является метод ветвей и границ (МВГ). Он основан на переборе узлов дерева вариантов с отсевом их значительной части, неперспективность которой определяется с помощью оценок значений целевой функции. В МВГ обычно используются так называемые *непрерывные* оценки, получающиеся при отбрасывании требований целочисленности переменных. Для вычисления таких оценок применяется техника ЛП. При переходе от произвольного узла дерева вариантов к смежному соответствующая задача ЛП изменяется незначительно, что позволяет эффективно пересчитывать непрерывную оценку.

Однако возможности такого традиционного МВГ ограничены. Для увеличения размерности решаемых задач желательно использовать в схеме МВГ оценки более сильные, чем непрерывные. Основная сложность при модификациях такого рода заключается в трудоемкости пересчета оценок. Здесь, как и в [1], исследуется путь, связанный с применением сильных оценок, которые вычисляются до начала МВГ и в дальнейшем не пересчитываются. Этот подход применим для задач ЦЛП общего вида, однако, по-видимому, он перспективен только для задач специальной структуры, в которых можно проводить ветвление по вариантам, удовлетворяющим ограничениям особой формы: каждая переменная задача должна входить не более чем в одно ограничение из выделяемой для проведения ветвления подсистемы. Таким свойством обладают целочисленные задачи транспортного типа, и в частности рассматриваемая здесь целочисленная обобщенная транспортная задача (ЦОТЗ).

Впервые процедура охарактеризованного выше типа, названная специальным методом ветвей и границ (СМВГ), была применена в [1] для решения целочисленной распределительной задачи. В [1] использовались оценки лагранжевой релаксации более сильные, чем непрерывные. Усиление оценки привело к заметному сокращению времени решения. В [2] было показано, что в задачах ЦЛП стратегия расслоения

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-012-499).

переменных [3] приводит к оценкам более сильным, чем при лагранжевой релаксации. Естественно было бы так модифицировать СМВГ, чтобы стало возможным использовать в его рамках эти более сильные оценки, которые мы будем называть *оценками расслоения*.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Здесь ЦОТЗ будет рассмотрена в следующем частном виде:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} \lambda_{ij} x_{ij} \geq a_i, \quad i \in I, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} \mu_{ij} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in J, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad (4)$$

где  $I = \{1, \dots, m\}$ ;  $J = \{1, \dots, n\}$ ;  $c_{ij}, \lambda_{ij}, \mu_{ij}; a_i, b_j$  — неотрицательные числа. Распространение метода на ЦОТЗ с произвольными целочисленными переменными особых затруднений не вызывает. Небольшие изменения в алгоритме позволяют решать ЦОТЗ на максимум, а также с измененными знаками неравенств в (2), (3). Если в (3) все  $\mu_{ij} \equiv 1$ , возникает целочисленная распределительная задача.

## 3. ОЦЕНКА РАССЛОЕНИЯ

Стратегия расслоения переменных [3] служит для декомпозиции задачи. Применительно к модели (1)–(4) она заключается в следующем. Обозначим переменные подсистемы (3) через  $y_{ij}$  и включим условия  $y_{ij} = x_{ij}$  в функцию Лагранжа с множителями  $\omega = (\omega_{ij}, i \in I, j \in J)$ . В результате задача распадается на  $m + n$  простых целочисленных подзадач, так называемых *задач о рюкзаке*. Произвольный вектор  $\omega$  задает оценку снизу для оптимального значения  $\bar{z}$  задачи (1)–(4). Максимизация по  $\omega$  приводит к наиболее сильной оценке расслоения

$$\bar{z} \geq \max_{\omega} \varphi(\omega) =: z_p^1,$$

где

$$\varphi(\omega) = \sum_{i \in I} \min \left\{ \sum_{j \in J} (c_{ij} - \omega_{ij}) x_{ij} \left| \sum_{j \in J} \lambda_{ij} x_{ij} \geq a_i, \right. \right. \\ \left. \left. x_{ij} \in \{0, 1\}, j \in J \right\} + \sum_{j \in J} \min \left\{ \sum_{i \in I} \omega_{ij} y_{ij} \left| \sum_{i \in I} \mu_{ij} y_{ij} \geq b_j, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I \right. \right\}. \quad (5)$$

Из результатов [2] следует, что эта оценка является более сильной, чем оценка лагранжевой релаксации, т.е.  $z_p^1 \geq z_L$ , где

$$z_L := \max_{v \geq 0} \sum_{i \in I} \min \left\{ \sum_{j \in J} (c_{ij} - \mu_{ij} v_j) x_{ij} \left| \sum_{j \in J} \lambda_{ij} x_{ij} \geq a_i, x_{ij} \in \{0, 1\} \right. \right\} + \sum_{j \in J} b_j v_j. \quad (6)$$

Для вычисления  $z_p^1$  требуется максимизировать вогнутую кусочно-линейную функцию от  $mn$  переменных. Для этого может быть применен любой из методов негладкой оптимизации (см., например, [4–6]).

Особо следует выделить метод уровней [5], который по числу итераций на практике

совпадает с теоретически оптимальным методом в классе выпуклых негладких задач. Приведенные в [7] численные результаты, связанные с использованием метода уровней для декомпозиции линейных задач, подтверждают его высокую эффективность. Преимущества метода уровней по сравнению с другими методами негладкой оптимизации тем значительнее, чем сложнее вычисляется субградиент. Именно такая ситуация типична для нахождения оценок расслоения. Так, для вычисления субградиента функции  $\varphi(\omega)$  (см. (5)) требуется решить  $m + n$  задач о рюкзаке.

При больших  $m, n$  применение любого из этих методов затруднительно. Однако за счет некоторого ослабления оценки расслоения можно существенно понизить трудоемкость ее вычисления. Рассмотрим релаксированную задачу, получающуюся из (1)–(4) заменой условий (4) на требования  $0 \leq x_{ij} \leq 1$ . Пусть  $\tilde{z}$  – оптимальное значение релаксированной задачи, а  $\tilde{u}_i, \tilde{v}_j$  – ее разрешающие множители. Из результатов [8] следует, что оптимальное значение задачи

$$\max_{\omega} \left[ \sum_{i \in I} \min \left\{ \sum_{j \in J} (c_{ij} - \omega_{ij}) x_{ij} \mid \sum_{j \in J} \lambda_{ij} x_{ij} \geq a_i, \right. \right. \\ \left. \left. 0 \leq x_{ij} \leq 1, j \in J \right\} + \sum_{j \in J} \min \left\{ \sum_{i \in I} \omega_{ij} y_{ij} \mid \sum_{i \in I} \mu_{ij} y_{ij} \geq b_j, 0 \leq y_{ij} \leq 1, i \in I \right\} \right], \quad (7)$$

получающейся из релаксированной задачи с помощью стратегии расслоения, совпадает с  $\tilde{z}$ , а оптимальный вектор  $\tilde{\omega}$ , максимизирующий (7), определяется неоднозначно и, в частности, может быть выражен через  $\tilde{u}_i, \tilde{v}_j$  двумя способами

$$\begin{aligned} \text{а) } \tilde{\omega}_{ij}^1 &= \frac{c_{ij} \mu_{ij} \tilde{v}_j}{\lambda_{ij} \tilde{u}_i + \mu_{ij} \tilde{v}_j}, \\ \text{б) } \tilde{\omega}_{ij}^2 &= \frac{1}{2} (c_{ij} - \lambda_{ij} \tilde{u}_i + \mu_{ij} \tilde{v}_j). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив эти значения в (5), получим оценки расслоения  $z_p^a, z_p^b$  более слабые, чем  $z_p^1$ , но более сильные, чем непрерывная оценка  $\tilde{z}$ .

Выразив в (5)  $\omega_{ij}$  по способу б) из (8), можно затем провести максимизацию функции  $\varphi(\omega(u, v))$  по  $u \geq 0, v \geq 0$ , усилив тем самым оценку  $z_p^b$ .

Для усиления оценки  $z_p^a$  используем следующий прием. Заметим, что

$$\frac{c_{ij} - \omega_{ij}^1}{\tilde{u}_i \lambda_{ij}} = \frac{\omega_{ij}^1}{\tilde{v}_j \mu_{ij}} = \frac{c_{ij}}{\lambda_{ij} \tilde{u}_i + \mu_{ij} \tilde{v}_j} =: t_{ij}. \quad (9)$$

Рассмотрим подзадачи в (5) и (7) при  $\omega_{ij} = \omega_{ij}^1$ . Из условий оптимальности подзадачи (7) следует, что для оптимальных  $\tilde{x}, \tilde{y}$   $\tilde{x}_{ij} = \tilde{y}_{ij} = 1$ , если  $t_{ij} < 1$ , и  $\tilde{x}_{ij} = \tilde{y}_{ij} = 0$ , если  $t_{ij} > 1$ . Задав порогом  $T_1, T_0, 0 < T_1 < 1, T_0 > 1$ , временно зафиксируем в (5)  $x_{ij} = y_{ij} = 1$ , если  $t_{ij} \leq T_1$ , и  $x_{ij} = y_{ij} = 0$ , если  $t_{ij} \geq T_0$ . Для зафиксированных переменных положим  $\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}^1$ . Для остальных  $(i, j)$  максимизируем по  $\omega$  функцию, определяемую по (5) с учетом проведенных фиксаций.

#### 4. СПЕЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Специфика предлагаемого метода заключается в том, что ветвление в нем проводится по вариантам, являющимся решениями подзадачи  $j \in J$  из (5). Оценки этих вариантов вычисляются с помощью таблиц динамического программирования,

построенных для подзадач  $i \in I$  из (5). Порядок использования подзадач  $j \in J$  для ветвления является обратным по сравнению с используемым при построении таблиц ДП для подзадач  $i \in I$ .

Пусть таблицы ДП для подзадач  $i \in I$  из (5) построены по рекуррентным уравнениям Беллмана при естественном упорядочении переменных,  $j = 1, \dots, n$

$$g_k^{(i)}(l) = \min\{g_{k-1}^{(i)}(l), (c_{ik} - \omega_{ik}) + g_{k-1}^{(i)}(l - \lambda_{ik})\},$$

$$g_k^{(i)}(l) := \min \left\{ \sum_{j=1}^k (c_{ij} - \omega_{ij}) x_{ij} \left| \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} x_{ij} \geq l, x_{ij} \in \{0, 1\} \right. \right\}.$$

Будем фиксировать переменные в обратном порядке:  $j = n, n-1, \dots, 1$ . В узле  $k$ -го уровня, в котором уже зафиксированы переменные  $x_{ij}, i \in I, j = n, \dots, k+1 (x_{ij} = \hat{x}_{ij})$ , осуществляем ветвление, строя решения подзадачи  $k \in J$ , упорядоченные по возрастанию оценки. Оценка варианта является суммой оценки начального узла (оценка единственного узла  $n$ -го уровня) где ни одна из переменных еще не зафиксирована, есть  $z_p$ -оценка расслоения задачи (1)–(4) и приращений оценки при фиксации переменных  $x_{ik}, i \in I, k = n, n-1, \dots$ . Приращения оценки  $\delta_{ik}(0), \delta_{ik}(1)$ , соответствующие фиксациям  $\hat{x}_{ik} = 0, \hat{x}_{ik} = 1$ , вычисляются по таблицам ДП

$$\delta_{ik}(0) = g_{k-1}^{(i)}(l_{ik}) - g_k^{(i)}(l_{ik}),$$

$$\delta_{ik}(1) = (c_{ik} - \omega_{ik}) + g_{k-1}^{(i)}(l_{ik} - \lambda_{ik}) - g_k^{(i)}(l_{ik}),$$

$$\text{где } l_{ik} = a_i - \sum_{j=k+1}^n \lambda_{ij} \hat{x}_{ij}.$$

Решения подзадачи  $k \in I$  из (5) генерируются методом упорядочивающей индексации (УИ) [8, 9] в порядке возрастания их оценки. Для этого к коэффициентам  $\omega_{ik}$  целевой функции добавляются числа  $\delta_{ik}(1) - \delta_{ik}(0)$  и методом УИ строится упорядоченная по возрастанию целевой функции последовательность решений задачи

$$\psi(x^k) := \sum_{i=1}^m (\omega_{ik} + \delta_{ik}(1) - \delta_{ik}(0)) x_{ik} + \sum_{i=1}^m \delta_{ik}(0) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik} \geq b_k, x_{ik} \in \{0, 1\}.$$

$$\text{Оценка генерируемого варианта } \hat{x}^k \text{ есть } \psi(\hat{x}^k) + z_p + \sum_{j=n}^{k+1} \psi(\hat{x}^j), \text{ где } z_p + \sum_{j=n}^{k+1} \psi(\hat{x}^j) -$$

оценка узла, в котором проводится ветвление. Если располагать вновь построенные узлы  $(k-1)$ -го уровня слева направо в порядке возрастания оценок соответствующих вариантов, то в предлагаемой здесь реализации МВГ применяется стратегия "иди влево". Варианты просматриваемых узлов генерируются при обходе дерева по мере надобности по методу УИ.

Отметим, что порядок использования подзадач  $j \in J$  из (5) для ветвления один и тот же на каждой ветви дерева вариантов. Его нельзя изменить, так как он должен быть обратным применяемому при построении таблиц ДП для подзадач  $i \in I$  из (5).

Если поменять порядок переменных в методе ДП для задач  $j \in I$ , то соответствующим образом изменится порядок использования подзадач  $i \in J$  для ветвления. В [1] было отмечено, что эффективность СМВГ существенно зависит от предварительного упорядочения  $j \in J$ . Каждую подзадачу  $j \in J$  из (5) можно охарактеризовать числом  $n_j$ -решений, оценка которых отличается от оптимальной не более чем на некоторый порог  $\Delta > 0$ . Подзадачи  $j \in J$  целесообразно упорядочить соответственно уменьшению  $n_j$  с тем, чтобы первыми ветвились узлы с небольшим числом вариантов. Для вычисления оценок решений  $j$ -й подзадачи надо использовать

помимо (прямых) таблиц ДП также и обратные, строящиеся при обратном упорядочении переменных.

Пусть

$$\tilde{g}_{k+1}^{(i)}(l) := \min \left\{ \sum_{j=n}^{k+1} (c_{ij} - \omega_{ij}) x_{ij} \left| \sum_{j=n}^{k+1} \lambda_{ij} x_{ij} \geq l, x_{ij} \in \{0, 1\} \right. \right\}.$$

Тогда штрафы за фиксацию переменной  $x_{ik}$  вычисляются по формулам

$$\delta_{ik}(0) = \min_{0 \leq l_i \leq a_i} \{g_{k-1}^{(i)}(l_i) + \tilde{g}_{k+1}^{(i)}(a_i - l_i)\},$$

$$\delta_{ik}(1) = \min_{0 \leq l_i \leq a_i - \lambda_{ik}} \{g_{k-1}^{(i)}(l_i) + (c_{ik} - \omega_{ij}) + \tilde{g}_{k+1}^{(i)}(a_i - l_i - \lambda_{ik})\}.$$

Оценка решения  $\hat{x}^k$   $k$ -й подзадачи,  $k \in I$ , будет

$$z_p + \sum_{i \in I} (\delta_{ik}(1) - \delta_{ik}(0)) \hat{x}_{ij} + \sum_{i \in I} \delta_{ik}(0).$$

Заметим, что для ЦОТЗ, где  $\mu_{ij} \equiv 1$ , упорядоченную по возрастанию оценки последовательность решений подзадачи  $k \in J$  можно генерировать более простым способом, не строя таблиц УИ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Азарян Л.Л., Лебедев С.С., Местецкий Л.М. Решение целочисленных задач транспортного типа с использованием обобщенных множителей Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1977. Т. XIII. Вып. 4.
2. Guignard M., Kim S. Lagrangean Decomposition: a Model Yielding Stronger Lagrangean Bounds // Mathem. Progr. 1987. V. 39. № 2.
3. Glover F., Klingman D. Layering Strategies for Creating Exploitable Structure in Linear and Integer Programs // Mathem. Progr. 1988. V. 40, № 2.
4. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979.
5. Lemarechal C., Nemirovskii A., Nesterov Y. New Variants of Bundle Methods // Reports de Recherche. N 1508. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Paris, 1991.
6. Лебедев С.С. Целочисленное программирование и множители Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1974. Т. X. Вып. 3.
7. Гольштейн Е.Г., Немировский А.С., Соколов Н.А. Новый алгоритм двойственной декомпозиции с приложением к задачам транспортного типа // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. Вып. 2.
8. Лебедев С.С. Модификация метода Бендерса частично-целочисленного линейного программирования // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. Вып. 2.
9. Лебедев С.С. Метод упорядоченного перебора целочисленного программирования // Тр. I Зимней школы по математическому программированию. Вып. 3. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1969.

Поступила в редакцию  
20 X 1994